ഗണിതശാസ്ത്രം

[ELECTIVE]
FOR
Standard X





The Educational Supplies Depot,
TRIVANDRUM....1

ഗണിതശാസ്ത്രം

[ELECTIVE]

(Prepared according to the new 1957 Syllabus)

ഗ്രന്ഥകർത്താ

S. Moses. M. A. L. T.
District Educational Officer,
Trivandrum (South)

THE EDUCATIONAL SUPPLIES DEPOT
TRIVANDRUM-1

Price Re. 1. N. Ps. 50.

വിഷയവിവരം

അദ്ധ്യായം 1

കൃതി, കൃത്യങ്കം മുതലായവയെ സംബന്ധിച്ച തത്വങ്ങൾ:—

$a \times a$ എന്ന ഗുണനഫലത്തെ a^2 എന്നും,
$a \times a \times a$ എന്നതിനെ a^3 എന്നും
$a \times a \times a \times a$,, a^4 ,,
മററും എഴുതാറുണ്ട്.

$a \times a$ എന്നതിൽ a എന്ന സംഖ്യയെ രണ്ടു ആവൎത്തി എഴുതി ഗുണിച്ചിരിക്കുന്നു. ഈ ഗുണനഫലത്തെ a യുടെ രണ്ടാം കൃതി (Power) എന്നു പറയും. a യുടെ രണ്ടാം കൃതിയാണു് ഈ ഗുണനഫലം എന്നു കാണിക്കുന്നതിനു a യുടെ വലതുവശത്തു അല്പം മുകളിലായി 2 എന്ന സംഖ്യ എഴുതുന്നു. ഈ സംഖ്യയാണു് a^2 ലെ കൃത്യങ്കം. (index; ഇതിന്റെ ബഹുവചനം indices എന്നാണു്).

a^3 എന്നതിൽ കൃത്യങ്കം 3
a^4 ,, ,, 4
a^5 ,, ,, 5
....
....
a^n ,, ,, n

ബീജഗണിതത്തിൽ, ഒരേ ഘടകം പല പ്രാവശ്യം ആവൎത്തിക്കുമ്പോൾ, ഗുണനഫലം ചുരുക്കമായി എഴുതു

ന്നതിനും പറയുന്നതിനും കൃത്യങ്കം ഉപയോഗിക്കുന്ന രീതി വളരെ ഉപകരിക്കുന്നു. പക്ഷേ, അതിന്റെ അൎത്ഥം നല്ലവണ്ണം മനസ്സിലാക്കണം.

$$x^3 = x \times x \times x$$
$$x^5 = x \times x \times x \times x \times x$$
$$6^3 = 6 \times 6 \times 6$$
$$x^2y^3 = x \times x \times y \times y \times y$$
$$2x^4y^2 = 2 \times x \times x \times x \times x \times y \times y.$$

അഭ്യാസം 1

ഹ്രസ്വമായി എഴുതുക:—

1. $x \times x \times y$
2. $a \times a \times y \times y \times y$
3. $2 \times b \times b \times x \times x$
4. $c \times c \times 5 \times d \times d \times f$
5. $3 \times m \times m \times m \times 2 \times n$

പിരിച്ചെഴുതുക:—

6. a^3b	7. $3x^3y^2$	8. $-5m^4n$
9. $2n^3k^2p$	10 $4p^4q^2$	11. m^2ny^3
12. $6a^5b^2$	13 $5x^3a^4$	14. $10d^4g^5$
15. x^4y^5	16. $7a^4x^3$	

ഗുണനം:—

$a^4 \times a^5$ ഗുണനഫലം കാണുക.

$$a^4 \times a^5 = (a \times a \times a \times a)\ (a \times a \times a \times a \times a)$$
$$= a \times a \times a \times a \times a \times a \times a \times a \times a$$
$$= a^9$$

രണ്ടു ഘടകങ്ങളെയും പിരിച്ചെഴുതിയപ്പോൾ a^4 ൽ നാലും a^5 ൽ അഞ്ചും പ്രാവശ്യം a എന്ന ചെറിയ ഘടകം ലഭിക്കുന്നു. ആകെ ഘടകം 9. ഒൻപതു പ്രാവശ്യം a എന്ന ഘടകം എഴുതുന്നതിനു പകരം a^9 എന്നു കൃത്യങ്കം ഉപയോഗിച്ചു എഴുതുന്നു.

ഗുണനഫലത്തിലെ 9 എന്ന കൃത്യങ്കം എങ്ങനെ ലഭിക്കുന്നു എന്നു ആലോചിക്കുക. a^4, a^5 എന്നിവയിൽ കാണുന്ന കൃത്യങ്കങ്ങളുടെ തുകയാണു് ഗുണനഫലത്തിലെ കൃത്യങ്കം.

തത്ത്വം:—ഘടകങ്ങളിലെ കൃത്യങ്കങ്ങളുടെ തുകയാണു് ഗുണനഫലത്തിലെ കൃത്യങ്കം

ഉദാ:—(i) $x^6 \times x^{10} = x^{16}$

(ii) $a^5 \times a^3 \times a^2 = a^{5+3+2} = a^{10}$

(iii) $2y^3 \times (-3y^4) \times y = 6y^8$

(iv) $a^4b^7 \times a^5b^8 = a^9b^{15}$

(v) $3a^2b^5 \times 4a^3b^2x^4 = 12a^5b^7x^4$.

അഭ്യാസം 2

ഗുണനഫലം കാണുക:—

1. m^5, m^3
2. n^6, n^7
3. $2a^3, a^2$
4. $4b^6, 3b^3$
5. $3x^5, x^2$
6. $\frac{1}{2}y^3, \frac{3}{4}y^{10}$
7. $\frac{2}{5}z^5, \frac{5}{4}z^9$
8. $c^3, 2c, 4c^2$
9. $2d^2, d^3, 5d$
10. $6p^8, 2p^2, \frac{3}{4}p$
11. a^2b^2, a^3, b^3
12. q^4r^2, q^3r^5, qr^2
13. $5x^2y^3, 4xy^4, x^3$
14. $a^4b^3c^2, a^3b^4c^5$
15. $m^7n^5k^4, m^2nk^2$
16. $3p^2q^5r^4, \frac{2}{3}pqr^3$
17. $a^2b^3x^5, a^3b^4x^2, 4a^2b^4x^5$

ഹരണം:—

$a^6 \div a^4$ ഹരണഫലം കാണുക.

$$\frac{a^6}{a^4} = \frac{a \times a \times a \times a \times a \times a}{a \times a \times a \times a}$$

$$= a \times a$$

$$= a^2$$

ഹരണഫലത്തിൽ 2 എന്ന കൃത്യങ്കം എങ്ങനെ ലഭിച്ചുവെന്നു പരിശോധിക്കുക. അംശത്തിൽ a എന്ന ഘടകം 6 പ്രാവശ്യവും, ഛേദത്തിൽ a എന്ന ഘടകം 4 പ്രാവശ്യവും ഉണ്ട്. ഛേദത്തിലുള്ള നാലു ഘടകവും അംശത്തിലുള്ള നാലു ഘടകങ്ങളുമായി വെട്ടിപ്പോയാൽ, ബാക്കി അംശത്തിൽ മാത്രം 2 പ്രാവശ്യം a എന്ന ഘടകം ഉണ്ട്. അതായതു ഹരണഫലം a^2.

$$6 - 4 = 2.$$

തത്വം: അംശഛേദങ്ങളിലെ കൃത്യങ്കങ്ങളുടെ വ്യത്യാസമാണ് ഹരണഫലത്തിലെ കൃത്യങ്കം.

ഉദാ: (i) $\frac{x^6}{x^4} = x^2$

(ii) $\frac{x^4}{x^6} = \frac{1}{x^2}$

(iii) $\frac{a^4b^7}{a^3b^2} = ab^5$

(iv) $\frac{a^5x^7}{a^8x^3} = \frac{x^4}{a^3}$

അഭ്യാസം

ലഘൂകരിക്കുക:—

1. $a^7 \div a^3$
2. $b^{10} \div b^8$
3. $c^8 \div c^9$
4. $d^2 \div d^7$
5. $10k^5 \div 5k^4$
6. $6l^7 \div 3l^5$
7. $12m^5 \div 4m$
8. $9n^7 \div 3n^3$
9. $15y^5 \div 3y^4$
10. $34p^6 \div 17p^8$
11. $\frac{2}{3}p^5 \div \frac{4}{3}p^3$
12. $\frac{4}{5}x^3 \div \frac{2}{5}x^5$
13. $\frac{27}{14}a^7 \div \frac{9}{7}a^5$
14. $x^4y^7 \div x^3y^5$
15. $4y^8z^2 \div 4y^6z^3$
16. $9a^4b^3c^2 \div 3a^3b^2c$
17. $21b^7c^5d \div 3b^5c^2d$
18. $x^2y^4 \times xy^2 \div x^2y^3$
19. $2x^5y^3 \times 3x^4y \times 6x^3y^3$
20. $a^2b^5 \div a^3b^3 \times a^2b^4$
21. $7b^4c \div 14bc^3 \times 4b^2c^4$
22. $a^2b^4 \times ax^3 \div b^2x^3$
23. $\frac{m^2n^4}{m^3n^2} \times \frac{m^4n}{mn} \div \frac{m^2n}{mn}$
24. $\frac{4a^3b^2c}{2abc} \div \frac{3a^5b^4}{b^4c^2} \times \frac{bc^4}{a^2b^3c^2}$

$(a^3)^2$ ഇതിന്റെ വില കാണുക;

$x^2 = x \times x$

അതുപോലെതന്നെ $(a^3)^2 = a^3 \times a^3$

$= a^{3+3}$

$= a^6$

ഉദാ: (i) $(a^5)^2 = a^5 \times a^5 = a^{10}$

(ii) $(a^7)^4 = a^7 \times a^7 \times a^7 \times a^7 = a^{28}$

മുകളിൽ കാണിച്ച ഉദാഹരണങ്ങളിൽ ഫലങ്ങളുടെ കൃത്യാങ്കം എങ്ങനെ ലഭിച്ചുവെന്നു പരിശോധിക്കുക.

$(a^3)^2 = a^6$ .... $3 \times 2 = 6$

$(a^5)^2 = a^{10}$ .... $5 \times 2 = 10$

$(a^7)^4 = a^{28}$ .... $7 \times 4 = 28$

$(a^4b^5)^3 = a^{12}b^{15}$ .... $4 \times 3 = 12$; $5 \times 3 = 15$.

അഭ്യാസം 4

താഴെ തന്നിരിക്കുന്ന ചോദ്യങ്ങളിലെ കോവ്വങ്ങൾ [illegible] ലഘൂകരിക്കുക:—

1. $(x^3)^4$ 2. $(x^5)^6$ 3. $(x^{10})^2$

4. $(x^2y)^2$ 5. $(y^3z^4)^3$ 6. $(2a^2b)^3$

7. $(a^3b^4)^3$ 8. $(3cx^3)^3$ 9. $(\frac{1}{2}cd)^4$

10. $\frac{1}{3}k^5l^3)^3$ 11. $(k^2l^3m^4)^4$ 12. $(5x^3y^2z)^3$

13. $(a^2b^3)^2\ (ab^2)^2$ 14. $(x^2y^5)^3\ (x^3y)$

15. $(2c^4d^3 \times (2cd)^3$ 16. $(p^2q)^3\ (p^3q^2)^2 \times pq$.

വർഗ്ഗവും വർഗ്ഗമൂലവും:—

$$25 = 5 \times 5$$
$$100 = 10 \times 10$$
$$x^2 = x \times x$$
$$x^6 = x^3 \times x^3$$

മുകളിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ ഏതെങ്കിലും ഒരു സംഖ്യയെ തുല്യമായ രണ്ടു ഘടകങ്ങളാക്കാൻ സാധിക്കുമെങ്കിൽ ആ സംഖ്യ ഒരു പൂർണ്ണവർഗ്ഗമാണു്. അതിന്റെ തുല്യഘടകങ്ങളിൽ ഒന്നു ആ സംഖ്യയുടെ വർഗ്ഗമൂലമാകുന്നു. ഇതാണു് √ വർഗ്ഗമൂലത്തിന്റെ അടയാളം.

$$\sqrt{a^4} = a^2$$
$$\sqrt{4a^8} = 2a^4$$
$$\sqrt{16a^{16}} = 4a^8$$
$$\sqrt{\tfrac{1}{9}x^6y^{10}} = \tfrac{1}{3}x^3y^5$$

വൎഗ്ഗമൂലത്തിലെ കൃത്യങ്കം വൎഗ്ഗത്തിലെ കൃത്യങ്കത്തിന്റെ പകുതിയായിരിക്കുന്നതു നോക്കുക.

മൂന്നാം വൎഗ്ഗമൂലം, നാലാം വൎഗ്ഗമൂലം മുതലായവയും ഇതുപോലെ കാണാവുന്നതാണു്.

$$x^3 = x \times x \times x$$
$$\therefore \sqrt[3]{x^3} = x$$

(a^3 ന്റെ മൂന്നാം വൎഗ്ഗമൂലം എന്നാണിതിന്റെ അൎത്ഥം)

$$x^6 = x^2 \times x^2 \times x^2$$
$$\therefore \sqrt[3]{x^6} = x^2$$
$$x^8 = x^2 \times x^2 \times x^2 \times x^2$$
$$\therefore \sqrt[4]{x^8} = x^2$$

അഭ്യാസം 5

വൎഗ്ഗമൂലം കാണുക:—

1. a^{10} 2. b^{12} 3. x^{16}
4. a^4b^6 5. $a^{10}b^{12}$ 6. x^8y^{16}
7. $4x^4y^8$ 8. $16x^8y^{12}$ 9. $\frac{1}{4}x^4y^{16}$
10. $c^{10}d^{16}$ 11. $16m^{12}n^{14}$ 12. $49x^8y^6z^{10}$

മൂന്നാം വൎഗ്ഗമൂലം കാണുക: —

13. a^3b^6 14. p^9q^{12} 15. $8x^3y^{12}$
16. $27m^9n^{21}$ 17. $p^6q^9r^{18}$
18. $64x^{15}y^{24}$

നാലാം വൎഗ്ഗമൂലം കാണുക:—

19. a^4b^8 20. c^8d^{16} 21. $16k^{12}m^8$
22. $81l^4m^8n^{12}$

ലഘൂകരിക്കുക:

23. $a^2b^3 \times (b^2c)^2 \div \sqrt{a^4c^2}$

24. $x^5y^2z \div \sqrt{x^8y^4z^2} \times (xyz)^3$

അദ്ധ്യായം 2

രാശിമാലകൾ: സങ്കലനവും വ്യവകലനവും.

രാശിമാലകൾ ഏകപദങ്ങളോ, ദ്വിപദങ്ങളോ, ത്രിപദങ്ങളോ, ... ബഹുപദങ്ങളോ ആയിരിക്കാം.

സങ്കലനം:

തുക കാണുക:—

(i) ഉദാ: $2x,\ 3x$

$2x + 3x = \underline{5x}$

(ii) $-2x,\ 3x$

$-2x + 3x = \underline{x}$

(iii) $+2x,\ -3x$

$+2x + (-3x) = +2x - 3x$

$= \underline{-x}$

(iv) $-2x,\ -3x$

$-2x,\ + (-3x) = -2x - 3x$

$= \underline{-5x}$

(v) $2a+3b,\ 3a-2b$

$(2a+3b) + (3a-2b)$

$= 2a+3b+3a-2b$

$= 2a+3a+3b-2b$

$= \underline{5a+b}$

(vi) $3x-4y, \ -5x+2y$

തുക $= (3x-4y) + (-5x + 2y)$

$= 3x-4y-5x + 2y$

$= 3x-5x-4y + 2y$

$= \underline{\underline{-2x-2y}}$

(vii) $a + 2b - c, \ 4a-3b + 2c, \ -3a + b - 3c$

$= (a + 2b - c) + (4a-3b + 2c) + (-3a + b - 3c)$

$= a+2b-c+4a-3b + 2c-3a+b-3c$

$= \underline{\underline{2a - c}}$

അല്ലെങ്കിൽ,

$$\begin{array}{r} a+2b-c \\ 4a-3b+2c \\ -3a+b-3c \\ \hline 2a \quad -2a \\ \hline\hline \end{array}$$

അഭ്യാസം 6

തുക കാണുക:—

1. $2x, \ -x$
2. $3x, \ -5x$
3. $-3x, +2x$
4. $-2a, \ -a$
5. $-3a, \ -5a$
6. $2a, \ +a. \ -5a$
7. $-2a, \ -3a, +4a$
8. $-3b, \ -4b, \ +5b$
9. $-5x, \ -15x, \ +7x, \ -x$
10. $2p, -12p, \ +2p, \ -7p$
11. $5ab, \ -2ab, \ +7ab, \ -3ab$
12. $3a^2, \ -5a^2, \ -a^2, \ +2a^2$
13. $-7xy, \ -5xy, \ +3xy, \ +5xy, -12xy$

ലഘൂകരിക്കുക.—

14. $+7x+(-2x)$
15. $-6+(-2)+(+3)$
16. $+5x+(-3x)+(-x)$
17. $+3-5+7$
18. $5-7+2-8$
19. $-4-1+3-5$
20. $-12+3-11+5$
21. $+3x-4x-2x-x$
22. $-5y-2y+3y-y$
23. $\frac{1}{2}m-\frac{3}{4}m-\frac{3}{2}m$
24. $1\frac{1}{4}n-2\frac{3}{4}n-\frac{1}{2}n$
25. $p-2q-3p-q+5p+7q$
26. $5q-2p+3p-2q-15p-q$
27. $3x-2y-y+5y-2x+5x$
28. $10y-2x+5x-7y+5z-3z$
29. $2m-3n+5r+5n-m-7r$
30. $3x^2-4x^2+5y^2-6x^2+9y^2$

തുക കാണുക:—

31. $2x+y,\ 3x-4y$
32. $a-3b,\ -2a+b$
33. $3x-5y,\ x+y,\ 2x-3y$
34. $4a-5b,\ 2a+b,\ -6a+b$
35. $x+y-z,\ x-y+z,\ y+z-x$
36. $x+2y-z,\ y+2z-x,\ z+2x-y$
37. $a+b-2c,\ b+c-2a,\ c+a-2b$
38. $2p+3q-r,\ 2q+3r-p,\ 2r+3p-q$
39. $a^2+a-2,\ 2a^2-3a+1,\ -2a^2+5a-7$
40. $-3m+n-1,\ -2m-3n-5,\ m+n+1$
41. $m^2-2m+1,\ m^2-1,\ m^2+2m+1$
42. $3n^2-7n-2,\ -4n^2-2n+5,\ 2n^2-6$

വ്യവകലനം —

$$a-(b+c)$$

ഇവിടെ $b+c$ എന്ന തുകയെ a യിൽ നിന്നു കുറയ്ക്കണമെന്നാണർത്ഥം. a യിൽ നിന്നു ആദ്യം b യെ കുറച്ചിട്ടു ബാക്കിയിൽ നിന്നു c യെ കുറച്ചാലും മതിയാകുന്നതാണല്ലോ.

$$\therefore a-(b+c)=a-b-c$$

അതായതു കുറയ്ക്കേണ്ട രാശികളുടെ ചിഹ്നം മാററി ലഘൂകരിച്ചാൽ മതി.

ഉദാ: (i) $10-(+6)=10-6=4$

(ii) $10-(-6)=10+6=16$

(iii) $2a-(3a-b)$

$=2a-3a+b$

$=-a+b$

(iv) $(2x-3y)-(-x+4y)$

$=2x-3y+x-4y$

$=3x-7y$

(v) $(a-2b)-(2a-3b+4c)$

$a-2b-2a+3b-4c$

$=-a+b-4c$

അഭ്യാസം 7

ലഘൂകരിക്കുക:—

1. $+7-(-2)$ 2. $3x-(+3x)$

3. $-6-(-3)$ 4. $-8-(-2)$

5. $-5x-(-2x)$ 6. $-3y-(+5y)$

7. $-2y-(-5y)$ 8 $-2x-(+3x)-(-x)$

9. $y-(-2y)-(+3y)$

താഴെ തന്നിരിക്കുന്ന ജോഡ്യങ്ങളിൽ ആദ്യത്തെ രാശിമാലയിൽനിന്നു രണ്ടാമത്തേതിനെ കുറയ്ക്കുക :—

10. $3x+2y$, $x-y$

11. $5x-3y$, $2x-3y$

12. $4a+3b$, $a-6b$

13. $2a-4b$, $a5-b$

14. $a-2b+3c$, $a+3b-c$

15. $3a-b+c$, $2a+2b-3c$

16. $2x+3y-z$, $3x-4y+z$

17. $p+q-r$, $p+q-2r$

18. $2p-q+3r$, $-q+3r-5p$

19. $4a+7b-3$, $a-10b-7$

20. $x+y-5$, $x-2y+7$

21. $2a-b+2c$, $a-b+3c$

22. m^2-3m+1, m^2-4m+2

23. m^2-n^2+5, m^2-3n^2+7

24. $2n^2+3n-1$, n^2-2n+3

25. $a^2+2ab+b^2$, $a^2-2ab+b^2$

26. $a^2-2ab+b^2$, a^2-b^2

27. $3l^2+3l+5$, $2l^2-l+3$

അദ്ധ്യായം 3

ഗുണനം

(i) $2\,(3+5)$

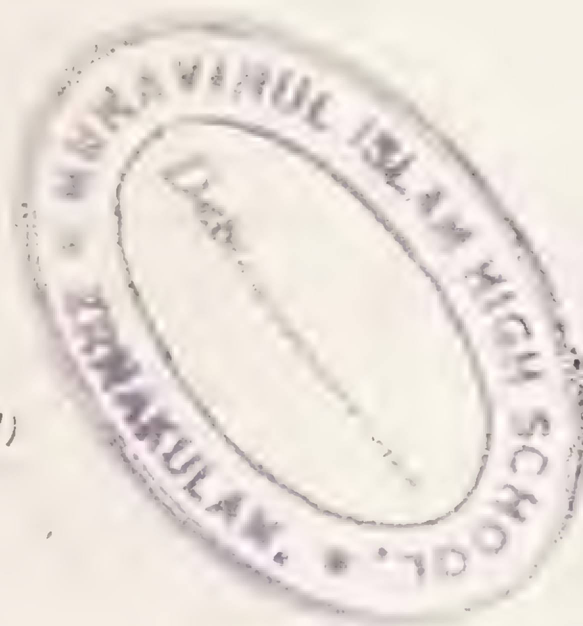
ഇവിടെ, കോഷ്ഠത്തിനുള്ളിലുള്ള രണ്ടുസംഖ്യകളുടെയും തുകയെ 2 കൊണ്ടു ഗുണിക്കണമെന്നാണർത്ഥം $2 \times 8 = 16$. എന്നാൽ, കോഷ്ഠത്തിനകത്തുള്ള ഓരോ സംഖ്യയേയും പ്രത്യേകം 2 കൊണ്ടു ഗുണിച്ച ഗുണനഫലങ്ങളെ കൂട്ടിയാലും ഈ ഉത്തരംതന്നെ കിട്ടും.

$$2 \times 3 + 2 \times 5 = 6+10 = 16$$

$$\therefore 2\,(3+5) = 2 \times 3 + 2 \times 5$$
$$= 6+10$$
$$= \underline{\underline{16}}$$

$$-2\,(x+y) = -2 \times x + (-2 \times y)$$
$$= \underline{\underline{-2x - 2y}}$$

$$-3\,(x-y) = -3 \times x + (-3 \times -y)$$
$$= \underline{\underline{-3x + 3y}}$$



$$2x\,(3x - 4y) = \underline{\underline{6x^2 - 8xy}}$$

(ii) $(2+4)\,(3+5) = 6 \times 8 = \underline{\underline{48}}$

അല്ലെങ്കിൽ, ആദ്യത്തെ കോഷ്ഠത്തിനകത്തുള്ള ഓരോ സംഖ്യകൊണ്ടും, രണ്ടാമത്തെ കോഷ്ഠത്തിനകത്തുള്ള ഓരോസംഖ്യയേയും ഗുണിച്ചുകിട്ടുന്ന നാലു ഗുണനഫലങ്ങളുടെയും തുക കണ്ടുപിടിച്ചാലും മതി.

$(2 + 4)\ (3 + 5)$
$= 2\ (3 + 5)\ +\ 4\ (3+5)$
$= 2 \times 3 + 2 \times 5 + 4 \times 3 + 4 \times 5$
$= 6 + 10 + 12 + 20$
$= \underline{\underline{48}}$

$(a + 2b)\ (2a + b)$
$= a\ (2a + b) + 2b\ (2a + b)$
$= 2a^2 + ab + 4ab + 2b^2$
$= \underline{\underline{2a^2 + 5ab + 2b^2}}$

$(a - b)\ (3a - 4b)$
$= a\ (3a - 4b) - b\ (3a - 4b)$
$= 3a^2 - 4ab - 3ab + 4b^2$
$= \underline{\underline{3a^2 - 7ab + 4b^2}}$

(iii) $(a + b - c)\ (a + 2b)$
$= a\ (a + 2b) + b\ (a + 2b) - c\ (a + 2b)$
$= a^2 + 2ab + ab + 2b^2 - ac - 2bc$
$= \underline{\underline{a^2 + 3ab + 2b^2 - ac - 2bc}}$

അഭ്യാസം 8

ഗുണനഫലം കാണുക:—

1. $2\ (a - 1)$
2. $x\ (a + b)$
3. $5\ (x - y)$
4. $y\ (2x + 3)$
5. $7\ (m - 2n)$
6. $3\ (2x - 3y)$
7. $4\ (y + x)$
8. $3x\ (x - y)$
9. $\frac{1}{3}\ (2x - 3)$
10. $x\ (2y + 3z)$

11. $\frac{3}{2}(3a-4)$

12. $-3(a-1)$

13. $-2(2x+y)$

14. $-3x(a-b)$

15. $-2y(x-1)$

16. $-5(3m+2n)$

17. $-2x(x-3y)$

18. $-\frac{1}{4}(8a-6)$

19. $-\frac{3}{4}(4x-6)$

20. $-\frac{2}{3}(3x-6)$

21. $(x+1)(x+2)$

22. $(x+1)(x+1)$

23. $(x+2)(x+2)$

24. $(x+2)(x+3)$

25. $(x+1)(x+3)$

26. $(x+2)(x+5)$

27. $(y+3)(y+3)$

28. $(y+3)(y+4)$

29. $(y+1)(y+4)$

30. $(y+2)(y+4)$

31. $(y+1)(y+5)$

32. $(y+4)(y+4)$

33. $(a+2)(a+5)$

34. $(a+4)(a+5)$

35. $(a+3)(a+5)$

36. $(a+1)(a+6)$

37. $(a+2)(a+6)$

38. $(a+3)(a+6)$

39. $(b+4)(b+6)$

40. $(b+5)(b+6)$

41. $(b+5)(b+5)$

42. $(b+6)(b+6)$

43. $(b+7)(b+1)$

44. $(b+7)(b+2)$

45. $(m+1)(m-2)$

46. $(m+2)(m-3)$

47. $(m+1)(m-3)$

48. $(m+2)(m-4)$

49. $(m+1)(m-4)$

50. $(m+3)(m-2)$

51. $(n-2)(n+3)$

52. $(n-1)(n+3)$

53. $(n-3)(n+5)$

54. $(n-4)(n+1)$

55. $(n-4)(n+2)$

56. $(n-4)(n+3)$

57. $(p-q)(p+2q)$

58. $(2p-3q)(p-q)$

59. $(p-2q)(3p-q)$

60. $(ab-2)(ab-3)$

61. $(xy-3)(2xy-1)$

62. $(x^2-2)(x^2-1)$

63. $(x-\frac{1}{2})(2x-1)$

64. $(2x-3y)(3x-2y)$

65. $(l^2-3)(l^2+2)$

66. $(l^2-2)(l^2-10)$

67. $(x^2-3)(x^2-4)$

68. $(a+b-2)(a+1)$

69. $(a+3b-1)(a-1)$

70. $(2x-3y+3)(x-3)$

71. $(3x-y+1)(2x-y)$

72. $(a+2b-c)(a-b)$

അദ്ധ്യായം 4

വാക്യങ്ങളുടെ ഉപയോഗം.

1. $(a+b)^2$ എന്നതിൽ $(a+b)$ എന്ന ഘടകം രണ്ടു പ്രാവശ്യം ഉണ്ട്. അതായത്,

$$(a+b)^2 = (a+b)\ (a+b)$$

മുൻ അദ്ധ്യായത്തിൽ ചെയ്തതുപോലെ $(a+b)(a+b)$ യുടെ ഗുണനഫലം കണ്ടുപിടിക്കാം.

$$\begin{aligned}(a+b)\ (a+b) &= a\ (a+b)+b\ (a+b)\\ &= a^2+ab+ab+b^2\\ &= \underline{a^2+2ab+b^2}\end{aligned}$$

$\therefore\ \underline{(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2}$ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു

ഇതിനെ ഒരു പൊതു നിയമമായി സ്വീകരിച്ചു, ഇതുപോലുള്ള വേറെ ചോദ്യങ്ങൾ, ഗുണനക്രിയ കൂടാതെ തന്നെ, ചെയ്യാവുന്നതാണ്. ഉദാഹരണമായി:

(i) $(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$

(ii) $$\begin{aligned}(2x+3y)^2 &= (2x)^2+2\ (2x)\ (3y)+(3y)^2\\ &= 4x^2+12xy+9y^2\end{aligned}$$

(iii) $$\begin{aligned}(9+8)^2 &= 9^2+2\times 9\times 8+8^2\\ &= 81+144+64\\ &= \underline{\underline{289}}\end{aligned}$$

(iv) $$\begin{aligned}105^2 = (100+5)^2 &= 100^2+2\times 100\times 5+5^2\\ &= 100,00+1000+25\\ &= \underline{\underline{11025}}\end{aligned}$$

2. $(a-b)^2 = (a-b)(a-b)$

$= a(a-b)-b(a-b)$

$= a^2-ab-ab+b^2$

$= \underline{\underline{a^2-2ab+b^2}}$

උදා: (i) $(x-y)^2 = x^2-2xy+y^2$

(ii) $(3x-2y)^2 = (3x)^2-2(3x)(2y)+(2y)^2$

$= \underline{\underline{9x^2-12xy+4y^2}}$

(iii) $98^2 = (100-2)^2$

$= 100^2-2\times 100\times 2+2^2$

$= 100{,}00-400+4$

$= \underline{\underline{9604}}$

3. $(a+b)(a-b) = a(a-b)+b(a-b)$

$= a^2-ab+ab-b^2$

$= \underline{\underline{a^2-b^2}}$

උදා: (i) $(x+y)(x-y) = x^2-y^2$

(ii) $(2a+3b)(2a-3b) = (2a)^2-(3b)^2$

$= \underline{\underline{4a^2-9b^2}}$

(iii) $\left(\frac{a}{2}+3\right)\left(\frac{a}{2}-3\right) = \left(\frac{a}{2}\right)^2-3^2$

$= \underline{\underline{\frac{a^2}{4}-9}}$

(iv) $103\times 97 = (100+3)(100-3)$

$= 100^2-3^2$

$= 100{,}00-9$

$= \underline{\underline{9991}}$

4. $(x+a)(x+b) = x(x+b)+a(x+b)$

$= x^2+bx+ax+ab$

$= \underline{x^2+(a+b)x+ab}$

ഗുണനഫലത്തിലെ ആദ്യരാശി, രണ്ടു ഘടകങ്ങളിലെയും ആദ്യരാശികളുടെ ഗുണനഫലവും, ഒടുവിലത്തെ രാശി ഘടകങ്ങളിലെ ഒടുവിലത്തെ രാശികളുടെ ഗുണനഫലവുമാണു്.

ഗുണനഫലത്തിലെ രണ്ടാമത്തെ രാശി പരിശോധിക്കുക. ax, bx എന്നീ രണ്ടു x രാശികളുടെയും തുകയാണു് ഗുണനഫലത്തിലെ രണ്ടാമത്തെ രാശിയെന്നു മനസ്സിലാകും. ഈ രാശിയിൽ, x ന്റെ ഗുണോത്തരം, ഘടകങ്ങളിലെ രണ്ടാമത്തെ രാശികളുടെ ബീജഗണിതത്തുകയാണു്.

$$(x+a)(x-b) = x(x-b) + a(x-b)$$
$$= x^2 - bx + ax - ab$$
$$= \underline{x^2 + (a-b)x - ab}$$

$$(x-a)(x+b) = x(x+b) - a(x+b)$$
$$= x^2 + bx - ax - ab$$
$$= \underline{x^2 + (b-a)x - ab}$$

$$(x-a)(x-b) = x(x-b) - a(x-b)$$
$$= x^2 - bx - ax + ab$$
$$= \underline{\underline{x^2 - (a+b)x + ab}}$$

മുകളിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്ന ഗുണനക്രിയകളിലെ ഘടകങ്ങളും ഫലങ്ങളും പരിശോധിച്ചു ഓരോന്നിലും ഫലങ്ങൾ എങ്ങനെ സിദ്ധിച്ചിരിക്കുന്നു എന്നു മനസ്സിലാക്കുക. ഇതുപോലുള്ള ദ്വിപദ രാശിമാനങ്ങളുടെ ഗുണനഫലങ്ങൾ ക്രിയ കൂടാതെ തന്നെ നിശ്ചയിക്കുന്നതിനു ഈ വാക്യങ്ങൾ സഹായകങ്ങളായിരിക്കും.

ഉദാ: (i) $(x+5)(x+3) = x^2 + (5+3)x + 5\times3$
$$= \underline{\underline{x^2 + 8x + 15}}$$

(ii) $(x+5)(x-3) = x^2 + (5-3)x + 5 \times (-3)$
$= \underline{\underline{x^2+2x-15}}$

(iii) $(x-5)(x+3) = x^2 + (-5+3)x + (-5) \times 3$
$= \underline{\underline{x^2-2x-15}}$

(iv) $(x-5)(x-3) = x^2 - (5+3)x + (-5)(-3)$
$= \underline{\underline{x^2-8x+15}}$

അഭ്യാസം ൯

വാക്യങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ചു താഴെ തന്നിരിക്കുന്നവയുടെ ഫലങ്ങൾ എഴുതുക:—

1. $(x+p)^2$
2. $(x+1)^2$
3. $(x+2)^2$
4. $(x+3)^2$
5. $(x+4)^2$
6. $(x+5)^2$
7. $(x+6)^2$
8. $(x+7)^2$
9. $(x+8)^2$
10. $(x+9)^2$
11. $(x+10)^2$
12. $(y-1)^2$
13. $(y-2)^2$
14. $(y-3)^2$
15. $(y-4)^2$
16. $(y-5)^2$
17. $(y-6)^2$
18. $(y-7)^2$
19. $(m+2n)^2$
20. $(m-2n)^2$
21. $(2m+3n)^2$
22. $(2m-3n)^2$
23. $(x+\frac{1}{2})^2$
24. $(n-\frac{1}{2})^2$
25. $(n-\frac{1}{3})^2$
26. $(n-\frac{1}{4})^2$
27. $(ab-3)^2$
28. $(xy-5)^2$
29. $(x^2+1)^2$
30. $(x^2-3)^2$
31. $(x+1)(x-1)$
32. $(x+2)(x-2)$
33. $(p+3)(p-3)$
34. $(p+4)(p-4)$
35. $(l+5)(l-5)$
36. $(l+6)(l-6)$

37. $(y+\frac{1}{2})(y-\frac{1}{2})$

38. $(xy+2)(xy-2)$

39. $(2x+3)(2x-3)$

40. $(3a+5)\ 3a-5)$

41. $(2d+5)(2d-5)$

42. $(5k+2)(5k-2)$

43. $(k^2+3)(k^2-3)$

44. $(b^2+5)(b^2-5)$

അഭ്യാസം 10

വാക്യങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ചു ഗുണനഫലം എഴുതുക:—

1. $(x+2)(x+1)$
2. $(x+3)(x+1)$
3. $(x+2)(x+3)$
4. $(x+4)(x+1)$
5. $(x+4)(x+2)$
6. $(x+5)(x+1)$
7. $(x+3)(x+3)$
8. $(x+4)(x+3)$
9. $(x+5)(x+2)$
10. $(x+6)(x+1)$
11. $(x+4)(x+4)$
12. $(x+5)(x+3)$
13. $(x+6)(x+2)$
14. $(x+7)(x+1)$
15. $(a+4)(a+5)$
16. $(a+6)(a+3)$
17. $(a+7)(a+2)$
18. $(a+8)(a+1)$
19. $(a+6)(a+4)$
20. $(a+7)(a+3)$
21. $(a+8)(a+2)$
22. $(a+9)(a+1)$
23. $(b+6)(b+5)$
24. $(b+7)(b+4)$
25. $(b+8)(b+3)$
26. $(b+9)(b+2)$
27. $(b+10)(b+1)$
28. $(m+7)(m+5)$
29. $(m+8)(m+4)$
30. $(m+9)(m+3)$
31. $(m+10)(m+2)$
32. $(m+11)(m+1)$
33. $(x-1)(x-2)$
34. $(x-1)(x-3)$
35. $(x-2)(x-3)$
36. $(a-1)(a-4)$
37. $(a-2)(a-4)$
38. $(b-3)(b-3)$
39. $(k-1)(k-5)$
40. $(k-2)\ k-5)$
41. $(y-3)(y-4)$
42. $(y-1)(y-6)$

43. $(d-3)(d-5)$
44. $(d-2)(d-6)$
45. $(d-1)(d-7)$
46. $(n-4)(n-5)$
47. $(n-3)(n-6)$
48. $(n-2)(n-7)$
49. $(n-1)(n-8)$
50. $(p-5)(p-5)$
51. $(p-4)(p-6)$
52. $(p-3)(p-7)$
53. $(p-2)(p-8)$
54. $(p-1)(p-9)$
55. $(x-5)(x-6)$
56. $(y-4)(y-7)$
57. $(z-3)(z-8)$
58. $(c-2)(c-9)$
59. $(c-1)(c-10)$
60. $(l-5)(l-7)$
61. $(l-4)(l-8)$
62. $(l-3)(l-9)$
63. $(t-2)(t-10)$
64. $(t-1)(t-11)$
65. $(x+5)(x-2)$
66. $(x+4)(x-2)$
67. $(y+3)(y-2)$
68. $(y+5)(y-3)$
69. $(a+6)(a-3)$
70. $(a+7)(a-4)$
71. $(b+5)(b-1)$
72. $(b+6)(b-2)$
73. $(c+7)(c-2)$
74. $(c+8)(c-5)$
75. $(d+8)(d-7)$
76. $(d+8)(d-6)$
77. $(h+6)(h-4)$
78. $(h+5)(h-1)$
79. $(k+9)(k-2)$
80. $(k+10)(k-4)$
81. $(x-5)(x+3)$
82. $(x-4)(x+1)$
83. $(x-5)(x+4)$
84. $(y-2)(y+1)$
85. $(y-3)(y+2)$
86. $(a-6)(a+5)$
87. $(a-7)(a+2)$
88. $(b-12)(b+2)$
89. $(b-12)(b+3)$
90. $(c-12)(c+4)$
91. $(c-20)(c+5)$
92. $(d-15)(d+3)$
93. $(d-12)(d+1)$
94. $(d-13)$ (d+[illegible])
95. $(h-13)(h+3)$
96. $(h-15)(h+2)$
97. $(k-15)(k+1)$
98. $(k-16)(k+2)$
99. $(k-19)(k+3)$
100. $(x-23)(x+4)$

അദ്ധ്യായം 5

ഘടകക്രിയ

$2 \times 5 \times 3 \quad = 30$

ഇവിടെ 30 എന്ന ഗുണനഫലം കിട്ടുന്നതിനു 2, 5, 3 എന്നീ സംഖ്യകളെ ഗുണിച്ചിരിക്കുന്നു. ഈ സംഖ്യകൾ 30-ൻെറ ഘടകങ്ങളാണു്.

a^2b എന്നതിൽ a, a, b എന്നിവയാണു് ഘടകങ്ങൾ.

$(a+b)\ (a+b) \quad = a^2+2ab+b^2$

ഇവിടെ $(a+b)$, $(a+b)$ എന്നീ ഘടകങ്ങളെ ഗുണിച്ചപ്പോൾ $a^2+2ab+b^2$ എന്ന ഗുണനഫലം കിട്ടിയിരിക്കുന്നു.

ഘടകക്രിയ, ഗുണനത്തിൻെറ വിപരീതക്രിയയാണു്. ഗുണനഫലം തന്നിരുന്നാൽ അതിൻെറ ഘടകങ്ങൾ ഏതെല്ലാമാണെന്നു കണ്ടുപിടിക്കുന്ന ക്രിയയാണതു്.

കഴിഞ്ഞ അദ്ധ്യായത്തിൽ പഠിച്ച വാക്യങ്ങളുടെ വെളിച്ചത്തിൽ, അവയുൾക്കൊള്ളുന്ന രാശിമാലകളുടെ ഘടകങ്ങൾ എളുപ്പം കണ്ടുപിടിക്കാൻ സാധിക്കും.

$(a+b)^2 \quad = a^2+2ab+b^2$

ഈ വാക്യത്തിൽ, ഗുണനഫലത്തിലെയും, ഘടകത്തിൻെറയും പദങ്ങൾക്കു തമ്മിലുള്ള ബന്ധം മനസ്സിലാക്കണം. ഗുണനഫലത്തിലെ ആദ്യപദം a^2, അതാ

യതു ഘടകത്തിന്റെ ആദ്യപദത്തിന്റെ വർഗ്ഗമാണു്. അതുപോലെതന്നെ ഗുണനഫലത്തിലെ ഒടുവിലത്തെ പദം b^2 അതായതു ഘടകത്തിന്റെ രണ്ടാംപദത്തിന്റെ വർഗ്ഗം. ഗുണനഫലത്തിലെ മദ്ധ്യപദം, ഘടകത്തിന്റെ രണ്ടു പദങ്ങളുടെയും ഗുണനഫലത്തിന്റെ ഇരട്ടിയാണു്.

ഘടകം കണ്ടുപിടിക്കാൻ തന്നിരിക്കുന്ന രാശിമാലയിലെ പദങ്ങൾക്കു, മുകളിൽ പറഞ്ഞ ലക്ഷണങ്ങൾ ഉണ്ടെങ്കിൽ, ആ രാശിമാലയുടെ ഘടകങ്ങൾ $(a+b)^2$ എന്ന രൂപത്തിലായിരിക്കും.

ഉദാ: (i) $p^2+2pq+q^2 = (p+q)^2$

(ii) $x^2+10x+25 = (x+5)^2$

[x^2, x ന്റെ വർഗ്ഗം, 25, 5 ന്റെ വർഗ്ഗം; $10x$, $x \times 5$ ന്റെ ഇരട്ടി]

(iii) $x^2+16x+64 = (x+8)^2$

(iv) $x^2-6x+9 = (x-3)^2$

(v) $x^2-8x+16 = (x-4)^2$

(vi) $4x^2+12xy+9y^2 = (2x+\cdot y)^2$

അഭ്യാസം 11

$a^2+2ab+b^2 = (a+b)^2$; $a^2 - 2ab+b^2 = (a-b)^2$ എന്നീ വാക്യങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ചു താഴെ കാണുന്ന രാശിമാലകളുടെ ഘടകങ്ങൾ എഴുതുക:—

1. x^2+2x+1
2. x^2+4x+4
3. x^2+6x+9
4. $x^2+10x+25$
5. $x^2+12x+36$
6. $x^2+14x+49$
7. $x^2+16x+64$
8. $x^2+18x+81$
9. $x^2+20x+100$
10. $x^2-12x+36$

11. $x^2-14x+49$ 12. $x^2-20x+100$
13. $x^2-22x+121$ 14. $x^2+40x+400$
15. $x^2+6xy+6y^2$ 16. $x^2+8xy+16y^2$
17. $4x^2+12xy+9y^2$ 18. $x^2-4xy+4y^2$
19. $9a^2-24ab+16b^2$ 20. $a^2-20ax+100x^2$
21. $25-40a+16a^2$ 22. $x^2+x+\frac{1}{4}$
23. $a^2-a+\frac{1}{4}$ 24. $x^2+\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}$
25. $m^2+\frac{m}{2}+\frac{1}{16}$ 26. $a^4-2a^2x^2+x^4$

$$(a+b)\ (a-b) = a^2-b^2$$

ഇവിടെ a, b എന്നീ സംഖ്യകളുടെ തുകയും വ്യത്യാസവും ഗുണിച്ചപ്പോൾ, ആ സംഖ്യകളുടെ വർഗ്ഗങ്ങളുടെ വ്യത്യാസമാണു ഫലമായി ലഭിച്ചിരിക്കുന്നതു്. അതുകൊണ്ടു, രണ്ടു വർഗ്ഗങ്ങളുടെ വ്യത്യാസം എന്ന രൂപത്തിൽ ഒരു രാശി മാല തന്നിരുന്നാൽ ഈ വാക്യം ഉപയോഗിച്ചു ഘടകങ്ങൾ ഉടൻതന്നെ എഴുതാൻ സാധിക്കും.

ഉദാ: (i) $x^2-9 = x^2-3^2$
$= (x+3)\ (x-3)$

(ii) $4x^2-25y^2 = (2x)^2-(5y)^2$
$= (2x+5y)\ (2x-5y)$

(iii) $x^2-\frac{1}{100} = x^2-(\frac{1}{10})^2$
$= (x+\frac{1}{10})\ (x-\frac{1}{10})$

(iv) $\frac{a^2}{9}-\frac{x^2}{y^4} = (\frac{a}{3})^2-(\frac{x}{y^2})^2$
$= (\frac{a}{3}+\frac{x}{y^2})\ (\frac{a}{3}-\frac{x}{y^2})$

(v) $(a+b)^2-(c+d)^2$

$=[(a+b)+(c+d)]\ [(a+b)-(c+d)]$

$=(a+b+c+d)\ (a+b-c-d)$

(vi) $x^4-1=(x^2+1)\ (x^2-1)$

$=(x^2+1)\ (x+1)\ (x-1)$

അദ്ധ്യായം 12

ഘടകങ്ങൾ എഴുതുക:—

1. a^2-9
2. a^2b^2-1
3. m^2-25
4. $36-y^2$
5. $49-4x^2$
6. $9x^2-16y^2$
7. $4c^2-25d^2$
8. $x^2-\frac{1}{4}$
9. $x^2y^2-\frac{1}{9}$
10. $\frac{x^2}{16}-\frac{1}{25}$
11. $y^2-\frac{9}{16}$
12. $a^2b^2-c^2$
13. a^4-1
14. x^4-y^4
15. p^2-q^4
16. m^4-9n^2
17. $4a^2-81b^2$
18. $9-x^2y^2$
19. $1-a^2b^2c^2$
20. $169-81y^2$
21. $4a^2b^2-25x^2$
22. $1-400x^2y^2$
23. $4a^4-49b^4$
24. a^8-1
25. x^4-16y^4
26. $(x+y)^2-a^2$
27. $(a+b)^2-c^2$
28. $(a-b)^2-c^2$
29. $(a+2b)^2-x^2$
30. $(n+y)^2-1$
31. $(x+2y)^2-9$
32. $(3x+$[illegible]$y)^2-16$
33. $(x-5y)^2-121$
34. $(2x-y)^2-9y^2$
35. $(4a-3b)^2-4b^2$
36. $(2a-3b)^2-9a^2$
37. $(x-3y)^2-16x^2$
38. $a^2-(b+c)^2$
39. $m^2-(n-k)^2$
40. $1-(2a+b)^2$

41.	$b^2-(3c-d)^2$	42	$4x^2-(b-2c)^2$
43.	$9a^2-(2b-c)^2$	44.	$(m+n)^2-(a+b)^2$
45.	$(x+y)^2-(c+d)$	46.	$(a-b)^2-(c-d)^2$
47.	$(k-l)^2-(p-q)^2$	48.	$(2a+3b)^2-(a-b)^2$
49.	$(x-y)^2-(3x-2y)^2$	50	$(4x+2y)^2-(3x+2y)^2$

എളുപ്പവഴിയിൽ വില കാണുക:—

51	198^2-196^2	52.	455^2-445^2
53.	52^2-48^2	54.	89^2-11^2
55.	$5{\cdot}85^2-4{\cdot}15^2$	56.	715^2-225

$$(x+5)\,(x+3) = x^2+(5+3)\,x+5\times 3$$
$$= x^2+8x+15.$$

ഇവിടെ ഗുണനഫലവും, ഘടകങ്ങളും പരിശോധിച്ചു, അവയുടെ പദങ്ങൾക്കു തമ്മിലുള്ള ബന്ധം കണ്ടുപിടിക്കുക. ഗുണനഫലത്തിലെ ഒടുവിലത്തെ പദം ഘടകങ്ങളിലെ ഒടുവിലത്തെ പദങ്ങളുടെ ഗുണനഫലമാണു്. ഗുണനഫലത്തിലെ മദ്ധ്യപദത്തിന്റെ ഗുണോത്തരം ഘടകങ്ങളിലെ ഒടുവിലത്തെ പദങ്ങളുടെ തുകയാണു്. ഈ തത്വം മനസ്സിലാക്കിയാൽ, ഘടകങ്ങളുടെ രണ്ടാമത്തെ പദങ്ങൾ കണ്ടുപിടിക്കാൻ പ്രയാസമില്ല.

ഉദാ: (i) $x^2+9x+20$ ഘടകങ്ങൾ എഴുതുക.

20 ഗുണനഫലവും, 9 തുകയുമായുള്ള രണ്ടു സംഖ്യകൾ 5, 4 എന്നിവയാണു്.

$\therefore$ ഘടകങ്ങൾ $(x+5)$, $(x+4)$ എന്നിവയാണു്.

$\therefore\ x^2+9x+20 = (x+5)\,(x+4)$

(ii) $x^2+12x+27 = (x+9)\,(x+3)$

(iii) $x^2-10x+24 = (x-6)\,(x-4)$

[ഇവിടെ തുക—10, ഗുണനഫലം + 24; അതു കൊണ്ടു സംഖ്യകൾ — 6, — 4 എന്നിവയാണു്]

(iv) $x^2+3x-10$

[ഇവിടെ തുക + 3, ഗുണനഫലം — 10

∴ സംഖ്യകൾ + 5,—2 എന്നിവയാണു്]

∴ $x^2+3x-10=(x+5)\ (x-2)$

(v) $x^2-2x-15$

[ഇവിടെ, തുക — 2, ഗുണനഫലം — 15;

∴ സംഖ്യകൾ — 5, + 3]

∴ $x^2-2x-15=(x-5)\ (x+3)$

അഭ്യാസം 13

ക്രിയ കൂടാതെ, മുകളിൽ വിവരിച്ച രീതിയിൽ, ഘടകങ്ങൾ എഴുതുക:—

1. x^2+3x+2
2. x^2+4x+3
3. x^2+4x+4
4. x^2+5x+4
5. x^2+6x+9
6. x^2+6x+8
7. x^2+6x+5
8. $x^2+7x+10$
9. x^2+7x+6
10. $x^2+8x+16$
11. $x^2+8x+15$
12. $x^2+8x+12$
13. x^2+8x+7
14. $x^2+9x+20$
15. x^2-2x+1
16. x^2-4x+4
17. x^2-5x+4
18. x^2-6x+9
19. x^2-6x+8
20. x^2-6x+5
21. $x^2-7x+10$
22. x^2-7x+6
23. $x^2-8x+16$
24. $x^2-8x+15$

25. $x^2 - 8x + 12$
26. $x^2 - 8x + 7$
27. $x^2 - 9x + 20$
28. $x^2 - 9x + 18$
29. $x^2 + 2x - 15$
30. $x^2 + 2x - 8$
31. $x^2 + 2x - 3$
32. $x^2 + x - 2$
33. $x^2 + x - 12$
34. $x^2 + x - 20$
35. $x^2 + 3x - 4$
36. $x^2 + 3x - 10$
37. $x^2 + 3x - 18$
38. $x^2 + 4x - 5$
39. $x^2 + 4x - 12$
40. $x^2 + 4x - 21$
41. $x^2 + 5x - 6$
42. $x^2 + 5x - 24$
43. $x^2 - 2x - 15$
44. $x^2 - 2x - 8$
45. $x^2 - 2x - 3$
46. $x^2 - x - 2$
47. $x^2 - x - 12$
48. $x^2 - x - 20$
49. $x^2 - 3x - 4$
50. $x^2 - 3x - 10$
51. $x^2 - 3x - 18$
52. $x^2 - 4x - 5$
53. $x^2 - 4x - 12$
54. $x^2 - 4x - 21$
55. $x^2 - 5x - 6$
56. $x^2 - 5x - 24$

പദങ്ങളിലെ സാധാരണ ഘടകം മാററി ഘടകക്രിയ ചെയ്യുക:—

$$x(a+b) = ax+bx$$

$x, (a+b)$ എന്നീ ഘടകങ്ങളെ ഗുണിക്കുമ്പോൾ $ax+bx$ എന്ന ഫലം കിട്ടുന്നു. $ax+bx$ എന്ന ഗുണനഫലത്തിൽ നിന്നു $x, a+b$ എന്നീ ഘടകങ്ങൾ എങ്ങനെ ലഭിക്കുന്നുവെന്നു നോക്കുക. ഓരോ പദത്തിലും x എന്ന ഘടകം കാണുന്നുണ്ടു്. ഇതിനെ പ്രത്യേകപ്പെടുത്തീട്ടു, പദങ്ങളിലെ ബാക്കിയുള്ള ഘടകങ്ങളെ കോഷ്ഠത്തിനുള്ളിലാക്കിയിരിക്കുകയാണു്. അങ്ങനെ $ax+bx$ എന്ന ഗുണനഫലത്തിനു $(x, a+b)$ എന്നീ ഘടകങ്ങൾ കിട്ടുന്നു.

ഘടകക്രിയ ചെയ്യുന്നതിനു തന്നിരിക്കുന്ന രാശി മാലയിലെ പദങ്ങളിൽ പൊതുവായ ഘടകം ഉണ്ടെങ്കിൽ അതിനെ ആദ്യം വെളിയിൽ എടുത്തിട്ടു ബാക്കി ഭാഗങ്ങളെ കോഷ്ഠത്തിനകത്താക്കേണ്ടതാണു്.

ഉദാ: (i) $x^2 - xy$

$= x\,(x - y)$

(ii) $ab + 3ac - 2ad$

$= a\,(b + 3c - 2d)$

(iii) $ax + bx + ay + by$

$= x\,(a+b) + y\,(a+b)$

$= (a+b)\,(x+y)$

(ഇവിടെ ഈ രണ്ടു പദങ്ങളായി, പൊതുഘടകം മാററി ക്രിയ ചെയ്തിരിക്കുകയാണു്;)

അഭ്യാസം 14

ഘടകങ്ങൾ കാണുക:

1. $5+10x$
2. $7x - 14y$
3. $2a+ab$
4. $a^2 - ab$
5. $m^2 - 4mn$
6. m^3+m^2
7. $a^2b - ab^2$
8. $2a^3 - 4a^2$
9. $3x^2 - 6xy$
10. $4x^2 - 8xy$
11. $3x^4 - 9x^3$
12. $6m^2 - 9mn$
13. $2xy+4x^2y^2$
14. $3x^5 - 6x^3$
15. $5a^3b^2 - 13a^2b^3$
16. $2x^6y^2+4x^3y^5$

17. $3k^2l - 6k^2l^2$
18. $4x^9 - 8x^3$
19. $m^2+mn+mk$
20. $8a^3+2a^2 - 4a$
21. $6x^5+3x^3+9x$
22. $a^3b - a^2b^2 - b^3$
23. $3x^2y - 9xy^2+6xy^3$
24. $x^3y^2+xy^3 - x^2y^2$
25. $a^3bc - abc^2+ab^2c$
26. $(a+b)\ x+ (a+b)y$
27. $a\ (b - c) + d\ (b - c)$
28. $x\ (x+y) - y\ (x+y)$
29. $x\ (x - a) - b\ (x - a)$
30. $x\ (a - 1) - y\ (a - 1)$
31. $x\ (y^2+1) + 2\ (y^2+1)$
32. $x^2\ (y+1) + y+1$
33. $x\ (b+1) - b - 1$
34. $k\ (a - b) - a+b$
35. $a^2+ax+ab+bx$
36. $a^2+ab - ac - bc$
37. x^3+x^2+x+1
38. $x^3 - x^2+x - 1$
39. $a^3 - 3a^2+4a - 12$
40. $a^2 - 2ab+ax - 2bx$
41. $ab - ac - bd+cd$
42. $2ay - 4xy - ax+2x^2$

മദ്ധ്യപദ വിഭജനത്തിൽ ഘടകക്രിയ:

$(x+3)\ (x+2)$	x^2+5x+6
$= x\ (x+2) + 3\ (x+2)$	$= x^2+3x+2x+6$
$= x^2+2x+3x+6$	$= x\ (x+3) + 2\ (x+3)$
$= \underline{\underline{x^2+5x+6}}$	$= \underline{\underline{(x+3)\ (x+2)}}$

മുകളിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്ന ക്രിയകൾ രണ്ടും പരിശോധിക്കുക. ഒന്ന്, ഘടകങ്ങളിൽനിന്നു ഗുണനഫലം

കാണുന്നത്. മറ്റേത് ഗുണനഫലമായ രാശിമാലയിൽനിന്നു ഘടകങ്ങൾ കാണുന്നത്. മൂന്നു രാശികളുള്ളതിൽ മദ്ധ്യരാശിയെ രണ്ടായി വിഭജിച്ചു, ഈരണ്ടായി ഘടിപ്പിച്ചു ക്രിയ ചെയ്യുകയാണ്.

$5x$ എന്ന മദ്ധ്യപദത്തിനെ $3x + 2x$ എന്നു പിരിച്ചെഴുതിയിരിക്കുന്നു. 3, 2 എന്നീ സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലമാണ് മൂന്നാമത്തെ രാശി 6.

ഉദാ: (i) $x^2 + 12x + 35$

$= x^2 + 7x + 5x + 35$

$= x(x+7) + 5(x+7)$

$= (x+7)(x+5)$

(ii) $x^2 - 10x + 21$

$= x^2 - 7x - 3x + 21$

$= x(x-7) - 3(x-7)$

$= (x-7)(x-3)$

(iii) $x^2 + 3x - 54$

$= x^2 + 9x - 6x - 54$........$(+9 \times -6 = -54$

$= x(x+9) - 6(x+9)$

$= (x+9)(x-6)$

അഭ്യാസം 15

ഘടകക്രിയ ചെയ്യുക:—(മദ്ധ്യപദം വിഭജിച്ചു)

1. x^2+4x+3
2. x^2+5x+6
3. x^2+6x+8
4. x^2+6x+5
5. x^2+6x+9
6. $x^2+7x+10$
7. $x^2+7x+12$
8. $x^2+8x+16$

9.	$x^2+8x+15$	10	$x^2+8x+12$
11.	$x^2+9x+20$	12.	$a^2+9a+18$
13.	$y^2+9y+14$	14	y^2+9y+8
15.	$a^2+10a+24$	16.	$a^2+10a+21$
17.	$b^2+11b+30$	18	$b^2+11b+28$
19	$b^2+11b+18$	20.	$m^2+12m+35$
21.	x^2-8x+7	22.	$x^2-11x+24$
23.	$x^2-12x+11$	24.	x^2-3x+2
25.	l^2-4l+3	26.	l^2-7l+6
27.	k^2-5k+4	28.	a^2-6a+8
29.	b^2-6b+9	30.	$k^2-7k+10$
31.	$m^2-7m+12$	32	m^2-7m+6
33.	$p^2-10p+16$	34.	$p^2-10p+9$
35.	$p^2-11p+28$	36.	$n^2-11n+18$
37.	$x^2+3x-10$	38.	x^2-2x-8
39.	y^2+y-6	40.	$y^2+2y-15$
41.	$a^2+3a-18$	42.	b^2+4b-5
43.	$b^2+4b-12$	44.	$c^2+3c-40$
45	$k^2+6k-40$	46	$x^2-2x-15$
47.	x^2-x-20	48.	y^2-y-6
49.	y^2-y-2	50.	y^2-y-30

---

x^2 രാശിയുടെ ഗുണോത്തരം ഏകമല്ലാതിരിക്കുമ്പോൾ:—

$(2x+3)(4x+5)$	$8x^2+22x+15$
$=2x(4x+5)+3(4x+5)$	$=8x^2+12x+10x+15$
$=8x^2+10x+12x+15$	$=4x(2x+3)+5(2x+3)$
$=8x^2+22x+15$	$=(2x+3)(4x+5)$

മുകളിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്ന രണ്ടു ക്രിയകളെയും പരിശോധിച്ചാൽ $22x$ നെ $12x+10x$ എന്നു രണ്ടു

രാശികളായി വിഭജിച്ചെഴുതിയിരിക്കുന്നതിന്റെ കാരണം മനസ്സിലാകും.

ആദ്യരാശിയിലെ ഗുണോത്തരം 8,

മൂന്നാമത്തെ രാശിയിലെ ഗുണോത്തരം 15.

ഇവയുടെ ഗുണനഫലം $8 \times 15 = 120.$

ഗുണനഫലം 120 കിട്ടത്തക്കവണ്ണം 22 നെ രണ്ടായി വിഭജിക്കണം. അപ്പോൾ 12, 10 എന്നിവ കിട്ടുന്നു.

ഉദാ. (i) $6x^2 + 13x + 6$

(ഗുണനഫലം $6 \times 6 = 36$; തുക 13. അതു കൊണ്ടു 9, 4 എന്നു മദ്ധ്യപദത്തെ വിഭജിക്കണം)

$$6x^2 + 9x + 4x + 6$$
$$= 3x(2x+3) + 2(2x+3)$$
$$= (2x+3)(3x+2)$$

(ii) $15x^2 - 17x - 4$

$$= 15x^2 - 20x + 3x - 4$$
$$= 5x(3x-4) + 1(3x-4)$$
$$= (3x-4)(5x+1)$$

അഭ്യാസം 16

ഘടകക്രിയചെയ്യുക :—

1. $6x^2 + 11a + 3$
2. $2x^2 + 5x + 3$
3. $4x^2 + 9x + 5$
4. $6x^2 + 13x + 6$
5. $3x^2 + 7x + 4$
6. $8x^2 + 18x + 9$
7. $6x^2 + 7x + 2$
8. $7x^2 + 10x + 3$

9. $10m^2 + 19m + 6$
10. $12y^2 + 17y + 6$
11. $20x^2 + 37x + 15$
12. $15x^2 + 29x + 12$
13. $3x^2 - 8x + 4$
14. $2x^2 - 5x + 3$
15. $6x^2 - 11x + 3$
16. $4x^2 - 9x + 5$
17. $6x^2 - 13x + 6$
18. $3x^2 - 7x + 4$
19. $7x^2 - 10x + 3$
20. $6x^2 - 7x + 2$
21. $19y^2 - 25y + 6$
22. $12m^2 - 17m + 6$
23. $15x^2 - 29x + 12$
24. $8x^2 - 2x - 15$
25. $12x^2 + 5x - 2$
26. $7y^2 + 19y - 6$
27. $2m^2 + 3m - 14$
28. $4x^2 + 19x - 5$
29. $6x^2 + x - 15$
30. $5x^2 + 2xy - 3y^2$
31. $15x^2 + 17xy - 4y^2$
32. $7x^2 - 19x - 6$
33. $2x^2 - 3x - 14$
34. $6x^2 - x - 15$
35. $12y^2 - 10y - 2$
36. $4y^2 - 19y - 5$
37. $5m^2 - 2m - 3$
38. $6x^2 - 7x - 5$
39. $15x^2 - 17x - 4$
40. $6 - 13x + 6x^2$

അദ്ധ്യായം 6

ഹരണം

ഒരു രാശിമാലയെ വേറൊരു രാശിമാലകൊണ്ടു ഹരിക്കുന്നതു രണ്ടു വിധത്തിലാകാം.

1. ഘടകക്രിയചെയ്തു, ഹാര്യത്തിലും, ഹാരകത്തിലും തുല്യമായ ഘടകങ്ങൾ ഉണ്ടെങ്കിൽ വെട്ടിക്കളയാം.

ഉദാ: (i) $\dfrac{2a + 4b}{2} = \dfrac{2\,(a + 2b)}{2} = a + 2b.$

(ii) $\dfrac{x^2 - y^2}{x + y} = \dfrac{(x + y)\,(x - y)}{x + y} = x - y.$

(iii) $\dfrac{x^2 + 7x + 10}{x + 2} = \dfrac{(x + 2)(x + 5)}{x + 2} = x + 5$

2. ദീർഘഹരണം:—ഘടകങ്ങളാക്കാൻ സൌകര്യമില്ലാത്ത ഹാര്യങ്ങളാണെങ്കിൽ ദീർഘഹരണരീതിയിൽ ക്രിയ നടത്താവുന്നതാണ്. ശിഷ്ടം വരാവുന്ന ഹരണങ്ങൾ ഈ രീതിയിൽ തന്നെയാണ് ചെയ്യേണ്ടതു്.

ഉദാ: (i) $\frac{x^2 + 9x + 18}{x + 3}$

$$
\begin{array}{r|l}
x + 3 & x^2 + 9x + 18 \; (x + 6 \\
 & \underline{x^2 + 3x} \\
 & \quad\quad 6x + 18 \\
 & \quad\quad \underline{6x + 18}
\end{array}
$$

വിശദീകരണം: ഹാര്യത്തിലുള്ള ആദ്യരാശിയെ ഹാരകത്തിലെ ആദ്യരാശികൊണ്ടു ഹരിക്കുക. $x^2 \div x = x$. ഇതായിരിക്കും ഹരണഫലത്തിലെ ആദ്യരാശി. ഹരണഫലത്തിൽ x എഴുതി, ഈ x കൊണ്ടു ഹാരകത്തിലെ ഓരോ പദത്തെയും ഗുണിച്ചു ഹാര്യത്തിലെ രാശികളുടെ താഴെയായി എഴുതി കുറയ്ക്കുക. $6x$ ആണ് കിട്ടിയതു് ഹാര്യത്തിലെ അടുത്ത രാശി (18) യെ താഴോട്ടു എഴുതുക. ആദ്യം ചെയ്തതുപോലെ ക്രിയ തുടരുക. ശിഷ്ടം ഇല്ല. ഹരണഫലം $x + 6$

(ii) $(3x^2 - 14x + 25) \div (x - 2)$

$$
\begin{array}{r|l}
x - 2 & 3x^2 - 14x + 25 \; (3x - 8 \\
 & \underline{3x^2 - 6x} \\
 & \quad - 8x + 25 \\
 & \quad \underline{- 8x + 16} \\
 & \quad\quad\quad\quad 9
\end{array}
$$

ഹരണഫലം $3x - 8$

ശിഷ്ടം 9

(iii) $(x^3 - 4x^2 + 7x + 5) \div (x + 3)$

$$x + 3 \,)\, x^3 - 4x^2 + 7x + 5 \,(\, x^2 - 7x + 28$$
$$\underline{x^3 + 3x^2}$$
$$- 7x^2 + 7x$$
$$\underline{- 7x^2 - 21x}$$
$$28x + 5$$
$$\underline{28x + 84}$$
$$- 79$$

ഹരണഫലം $x^2 - 7x + 28$

ശിഷ്ടം $- 79$

(iv) $(x^3 - x + 5) \div (x - 2)$

$$x - 2 \,)\, x^3 + 0 - x + 5 \,(\, x^2 + 2x + 3$$
$$\underline{x^3 - 2x^2}$$
$$2x^2 - x$$
$$\underline{2x^2 - 4x}$$
$$3x + 5$$
$$\underline{3x - 6}$$
$$11$$

ഹരണഫലം $x^2 + 2x + 3$

ശിഷ്ടം 11

ഹാരകവും, ഹാര്യവും രാശിമാലയിലെ ഏതെങ്കിലും അക്ഷരത്തെ അടിസ്ഥാനപ്പെടുത്തി അവരോഹണക്രമത്തിൽ എഴുതിയിരിക്കണം. ഏതെങ്കിലും പദം ഇല്ലാതിരുന്നാൽ അതിന്റെ സ്ഥലം വെറുതെയിടണം.

അഭ്യാസം 17

ഹരണഫലം കാണുക.

1. $(x^2 + 5x + 6) \div (x + 2)$
2. $(x^2 + 7x + 10) \div (x + 5)$
3. $(x^2 + 6x + 9) \div (x + 3)$
4. $(x^2 + 8x + 15) \div (x + 5)$
5. $(x^2 - 9x + 14) \div (x - 2)$
6. $(a^2 - 10a + 21) \div (a - 3)$
7. $(a^2 - 12a + 20) \div (a - 10)$
8. $(a^2 - 3a - 18) \div (a + 3)$
9. $(a^2 - 9a - 36) \div (a - 12)$
10. $(b^2 + 10b - 75) \div (b - 5)$
11. $(2b^2 + 9b + 10) \div (b + 2)$
12. $(6b^2 + 23b + 20) \div (2b + 5)$
13. $(12y^2 + y - 6) \div (3y - 2)$
14. $(15y^2 + 26y - 21) \div (5y - 3)$
15. $(35y^2 - 62y + 24) \div (7y - 4)$
16. $(2p^3 + 5p^2 - p - 6) \div (p + 2)$
17. $(6m^3 - 25m^2 + 13m + 30) \div (2m - 5)$
18. $(15n^3 - 8n^2 - 37n + 28) \div (3n - 4)$
19. $(21k^3 + 43k^2 - 29k - 35) \div (3k + 7)$
20. $(15x^3 - 34x^2 - 15x + 50) \div (3x - 5)$

ഹരണഫലവും ശിഷ്ടവും കാണുക:—

21. $(3x^2 - 4x + 5) \div (x - 5)$
22. $(5y^2 - y - 12) \div (y - 3)$
23. $(6p^2 + 12p - 1) \div (2p + 1)$
24. $(3x^3 + x^2 - 4x + 5) \div (x + 2)$
25. $(4a^3 - 3a^2 + a - 7) \div (2a - 3)$
26. $(2x^2 - 3) \div (x - 2)$
27. $(x^3 - x + 7) \div (x + 3)$
28. $(2x^3 + 3x^2 - 5) \div (x + 1)$
29. $(x^3 - y^3) \div (x - y)$
30. $(x^3 + y^3) \div (x + y)$

അദ്ധ്യായം 7

ദ്വിമാനസമവാക്യം (Quadratic Equation)

ദ്വിമാനസമവാക്യത്തിന്റെ നിയതരൂപം (standard form) $ax^2+bx+c=0$. ഇതിൽ a, b, c എന്നിവ രാശികളുടെ ഗുണോത്തരങ്ങളാണ്. രണ്ടാമത്തെ രാശി, (അതായതു് x വരുന്ന രാശി) ചിലപ്പോൾ കാണുകയില്ല.

(ഉദാ:) (i) നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക:—

$$3x^2 = 27$$

$$\therefore \quad x^2 = \frac{27}{3} = 9$$

$$\therefore \quad x = \sqrt{9} = +3 \text{ അല്ലെങ്കിൽ } -3.$$

[+ അല്ലെങ്കിൽ — 3 എന്നതിനെ ± 3 എന്നു് ചുരുക്കി എഴുതാം)

(ഉദാ:) (ii) $9x^2 = 7x^2 + 32$

$$\therefore \quad 9x^2 - 7x^2 = 32$$

$$\therefore \quad 2x^2 = 32$$

$$\therefore \quad x^2 = 16$$

$$\therefore \quad x = \sqrt{16}$$

$$= \pm 4$$

അഭ്യാസം 18

നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക:—

(1) $x^2 = 25$ (2) $x^2 - 49 = 0$

(3) $5x^2 = 20$ (4) $x^2 + 8 = 33$

(5) $x^2 - 4 = 12$ (6) $2x^2 + 3 = 35$

(7) $x^2 - 20 = 80$ (8) $7x^2 + 9 = 72$

(9) $5x^2 + 9 = 117$ (10) $6x^2 + 4 = 3x^2 + 79$

(11) $10x^2 + 13 = 4x^2 + 163$ (12) $7x^2 - 48 = 2x^2 - 3$

(13) $4x^2 + 12 = 7x^2 + 9$ (14) $9x^2 + 30 = 3(5x^2 - 6)$

(15) $12x^2 = 3x^2 + 36$ (16) $x(3x - 2) = 27 - 2x$

(17) $4(x^2 + 3) - 5 = 3x^2 + 16 - 5(x^2 - 3)$

(18) $(x^2 + 7)(x^2 - 3) = (x^2 - 15)(x^2 - 5)$

(19) $\dfrac{x^2 - 1}{12} + 1 = \dfrac{x^2 + 1}{10}$

(20) $\dfrac{3x + 1}{4x + 3} = \dfrac{5}{9} + \dfrac{x - 2}{4x - 3}$

$ax^2 + bx + c = 0$ പോലുള്ള സമവാക്യത്തിന്റെ നിർദ്ധാരണം:—

(ഉദാ:) $x^2 - 7x + 10 = 0$.

$\therefore (x - 5)(x - 2) = 0$.

രണ്ടു ഘടകങ്ങളുടെ ഗുണനഫലം $= 0$.

അതുകൊണ്ട് $x - 5 = 0$ ആയിരിക്കണം. അല്ലെങ്കിൽ,

$x - 2 = 0$ ആയിരിക്കണം.

$x - 5 = 0$ ആണെങ്കിൽ $\underline{\underline{x = 5}}$

$x - 2 = 0$,, $\underline{\underline{x = 2}}$

5, 2 എന്നിവയാണ് സമവാക്യത്തിലെ x ന്റെ വിലകൾ.

അഭ്യാസം 19

(1) $(x-3)(x-5)=0$ (2) $(x-2)(x+4)=0$

(3) $(x+7)(x-6)=0$ (4) $(x+1)(x+8)=0$

(5) $(1-x)(x+2)=0$ (6) $(3-x)(10-x)=0$

(7) $(4x-3)(x-\frac{1}{2})=0$ (8) $(2x-5)(3x-8)=0$

(9) $(\frac{x}{3}+5)(\frac{x}{2}-4)=0$ (10) $(\frac{3x}{4}-1)(5x-1)=0$

(11) $x(x+3)=0$ (12) $3x(4x-3)=0$

(13) $(2x-3)^2=0$ (14) $(4x+5)^2=0$

(15) $x^2+2x+1=0$ (16) $x^2-2x+1=0$

(17) $x^2-x-2=0$ (18) $x^2+x-2=0$

(19) $x^2-3x+2=0$ (20) $x^2+5x+6=0$

(21) $x^2-x-12=0$ (22) $10+11x+x^2=0$

(23) $x^2-11x+18=0$ (24) $x-6+\frac{8}{x}=0$

(25) $2x^2-5x+2=0$ (26) $6x^2-5x-6=0$

(27) $2x^2+3x-9=0$ (28) $6x^2+13x+6=0$

(29) $2x^2=7x-6$ (30) $6x^2=7x+3$

(31) $x(x+2)=35$ (32) $x(x-5)=14$

(33) $x(x+3)=28$ (34) $x(3x+7)=6$

(35) $3x(9x-5)=8$ (36) $5(3x^2-4)=48x$

(37) $\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x+1}-\frac{1}{8x-2}=0$ (38) $2(x+3)\ 5+\frac{7}{x+2}=0$

(39) $\frac{x+3}{x-3}-\frac{x+1}{x-1}=\frac{16}{3}$

ഘടകങ്ങൾ കണ്ടുപിടിക്കാതെ തന്നെ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുന്നതിന് താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന വാക്യം ഉപയോഗപ്പെടും:—

സമവാക്യം $ax^2 \div bx+c=0$;

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

ഇതിൽ a, b, c എന്നിവ യഥാക്രമം x^2 രാശി, x രാശി, x ഇല്ലാത്തരാശി എന്നിവയുടെ ഗുണോത്തരങ്ങളാണു്.

(ഉദാ:) (i) നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക.—

$$2x^2 - 11x + 12 = 0.$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{(-11) \pm \sqrt{(-11)^2 - 4(2)(12)}}{2 \times 2}$$

$$= \frac{11 \pm \sqrt{121 - 96}}{4}$$

$$= \frac{11 \pm \sqrt{25}}{4}$$

$$= \frac{11 \pm 5}{4} \quad = 4 \text{ അല്ലെങ്കിൽ } 1\tfrac{1}{2}$$

മുകളിലത്തെ മാതിരി ഘടകങ്ങളാക്കിയും ചെയ്യാവുന്നതാണ്. എന്നാൽ വാക്യം ഉപയോഗിക്കുന്നതിൽ ഓരോരു സൗകര്യം കൂടിയുണ്ടു്. ഘടകങ്ങളാക്കാൻ സാധിക്കാത്ത രാശിമാലകളിലും വാക്യം ഉപയോഗിച്ചു ഉത്തരം കണ്ടുപിടിക്കാവുന്നതാണ്.

(ഉദാ:) (ii) നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക.—

$$3x^2 + 4x - 5 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(3)(-5)}}{2 \times 3}$$

$$= \frac{-4 \pm \sqrt{16+60}}{6}$$

$$= \frac{-4 \pm \sqrt{76}}{6}$$

$$= \frac{-4 \pm 8{\cdot}72}{6}$$

$= \cdot 79$ അല്ലെങ്കിൽ $-2{\cdot}12$ ഏകദേശം

76 എന്ന സംഖ്യക്കു് ക്ലിപ്തമായ വർഗ്ഗമൂലം (Square root) ഇല്ലാത്തതുകൊണ്ടു് ഉത്തരം ഏകദേശമായിട്ടേ കിട്ടുകയുള്ളു. വർഗ്ഗമൂലം കണ്ടുപിടിക്കേണ്ടതായ $b^2 - 4ac$ എന്നതിന്റെ വില ക്ഷയസംഖ്യയായാൽ സമവാക്യത്തിന്റെ മൂലം വാസ്തവികമായിരിക്കുകയില്ല.

അഭ്യാസം 20

വാക്യം ഉപയോഗിച്ചു് നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക:—

(1) $x^2 - 15x + 54 = 0$
(2) $x^2 + 5x - 14 = 0$
(3) $x^2 + 16x + 48 = 0$
(4) $x^2 + x - 72 = 0$
(5) $x^2 - x - 42 = 0$
(6) $x^2 - 2x - 35 = 0$
(7) $2x^2 - 15x + 28 = 0$
(8) $6x^2 - 17x + 5 = 0$
(9) $12x^2 - 11x + 2 = 0$
(10) $3x^2 + 2x - 8 = 0$
(11) $6x^2 + 11x - 35 = 0$
(12) $30x^2 - 67x + 35 = 0$

താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ചോദ്യങ്ങളിൽ ഉത്തരം 2 ദശാംശസ്ഥാനങ്ങൾക്കു ശരിയായി കണ്ടുപിടിക്കുക.

(13) $x^2 + 4x - 2 = 0$
(14) $2x^2 + 4x - 3 = 0$
(15) $2x^2 + 3x - 4 = 0$
(16) $3x^2 + x - 7 = 0$

(17) $5x^2 + 2x - 4 = 0$ (18) $3x^2 - 20x + 5 = 0$

(19) $4x^2 + 9x + 4 = 9$ (20) $7x^2 + 12x + 4 = 0$

(21) $8x^2 + 17x + 6 = 0$

ദ്വിമാനവാക്യരീതിയിൽ ചെയ്യാവുന്ന ചോദ്യങ്ങൾ:—

(ഉദാ:) ഒരു സംഖ്യയുടെ വർഗ്ഗം, അതിന്റെ മൂന്നിരട്ടിയെക്കാൾ 28 കൂടുതലായാൽ സംഖ്യ ഏതു്?

സംഖ്യ x എന്നിരിക്കട്ടെ. അതിന്റെ വർഗ്ഗം x^2. അതിന്റെ മൂന്നിരട്ടി $3x$.

$$\therefore x^2 - 3x = 28$$
$$\therefore x^2 - 3x - 28 = 0$$
$$\therefore x^2 - 7x + 4x - 28 = 0$$
$$\therefore x(x - 7) + 4(x - 7) = 0$$
$$\therefore (x - 7)(x + 4) = 0$$
$$\therefore (x - 7) = 0 \text{ or } (x + 4) = 0$$
$$\therefore x = 7 \text{ or } -4$$

അഭ്യാസം 21

---

(1) ഒരു സംഖ്യയുടെ വർഗ്ഗം ആ സംഖ്യയുടെ 11 മടങ്ങിനെക്കാൾ 42 കൂടുതലായാൽ സംഖ്യ ഏതു്?

(2) ഒരു സംഖ്യയുടെ വർഗ്ഗം ആ സംഖ്യയുടെ 5 മടങ്ങിനെക്കാൾ 150 കൂടുതലായാൽ സംഖ്യ ഏതു്?

(3) ഒരു സംഖ്യയുടെ വർഗ്ഗം ആ സംഖ്യയുടെ 16 മടങ്ങിനെക്കാൾ 60 കുറവായാൽ സംഖ്യ കാണുക.

(4) ഒരു സംഖ്യയുടെ വർഗ്ഗം ആ സംഖ്യയുടെ 35 മടങ്ങിനെക്കാൾ 100 കുറവായാൽ സംഖ്യ കാണുക

(5) ഒരു സംഖ്യയുടെ വർഗ്ഗം ആ സംഖ്യയുടെ 20 മടങ്ങിനെക്കാൾ 75 കുറവായാൽ സംഖ്യ ഏതു്?

(6) ഒരു സംഖ്യയുടെ വർഗ്ഗം ആ സംഖ്യയുടെ 20 മടങ്ങിനു സമമായാൽ സംഖ്യ കാണുക.

(7) ഒരു സംഖ്യയുടെ വർഗ്ഗം, ആ സംഖ്യയും 8-ഉം ഗുണിച്ചുകിട്ടിയ തുകയുടെ 4 മടങ്ങായാൽ സംഖ്യ ഏതു്?

(8) ഒരു സംഖ്യയും 6-ഉം ഗുണിച്ചുകിട്ടിയ തുകയുടെ മൂന്നിരട്ടി, ആ സംഖ്യയുടെ വർഗ്ഗത്തിനെക്കാൾ 45 കൂടുതലായാൽ സംഖ്യ ഏതു്?

(9) തുടർച്ചയായ രണ്ടു് ഇരട്ട സംഖ്യകളുടെ വർഗ്ഗങ്ങളുടെ തുക 244 സംഖ്യകൾ ഏവ?

(10) തുടർച്ചയായ രണ്ടു ഇരട്ട സംഖ്യകളുടെ വർഗ്ഗങ്ങളുടെ തുക 580. സംഖ്യകൾ ഏവ?

(11) തുടർച്ചയായ രണ്ടു ഒററ സംഖ്യകളുടെ വർഗ്ഗങ്ങളുടെ തുക 290. സംഖ്യകൾ ഏവ?

(12) തുടർച്ചയായ രണ്ടു ഒററ സംഖ്യകളുടെ വർഗ്ഗങ്ങളുടെ തുക 514. സംഖ്യകൾ ഏവ?

(13) തുടർച്ചയായ രണ്ടു ഇരട്ട സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലം അവയുടെ തുകയെക്കാൾ 62 കൂടുതലായാൽ സംഖ്യകൾ ഏവ?

(14) ഒരു സമചതുരത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം 576 ച. അ. ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം കാണുക.

(15) ഒരു ദീർഘചതുരത്തിന്റെ നീളം അതിന്റെ വീതിയുടെ രണ്ടിരട്ടി. അതിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം 450 ച. അടിയായാൽ നീളവും വീതിയും കാണുക.

(16) ഒരു ദീർഘചതുരത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം 432 ച. അ. അതിന്റെ നീളം വീതിയുടെ മൂന്നിരട്ടിയായാൽ നീളവും വീതിയും കാണുക.

(17) ഒരു ദീർഘചതുരത്തിന്റെ ചുററളവു 56 അ. അതിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം 192 ച. അടിയായാൽ നീളവും വീതിയും കാണുക.

(18) ഒരു ദീർഘചതുരത്തിന്റെ ചുററളവു് 62 അടി. അതിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം 228 ച. അടിയായാൽ നീളവും വീതിയും കാണുക.

(19) ഒരു ദീർഘചതുരത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം 150 ച. അ. അതിന്റെ വീതിയോടുകൂടി 3 അടി കൂട്ടി, നീളത്തിൽ നിന്നു് 2 അടി കുറച്ചാൽ അതു സമചതുരമാകുമെങ്കിൽ അതിന്റെ നീളവും വീതിയും കാണുക.

(20) ഒരു ദീർഘചതുരത്തിന്റെ വീതി അതിന്റെ നീളത്തിന്റെ ⅔. അതിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം 600 ച. അടിയായാൽ അതിന്റെ നീളവും വീതിയും കാണുക.

(21) ഒരു ദീർഘചതുരത്തിന്റെ നീളം വീതിയുടെ ഇരട്ടിയെക്കാൾ 3 കൂടുതൽ. വിസ്തീർണ്ണം 65 ച. അടിയായാൽ അതിന്റെ നീളവും വീതിയും എന്തു്?

(22) ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ പാദവും ഉയരവും കൂടി 7 ഇഞ്ചു്. അതിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം 6 ച. ഇം. കർണ്ണത്തിന്റെ നീളം കാണുക.

(23) ഒരു വ്യാപാരി x ഉറുപ്പികയ്ക്കു ഒരു ഘടികാരം വാങ്ങി 39 ഉറുപ്പികയ്ക്കു വിററപ്പോൾ $x\%$ ലാഭം കിട്ടിയെങ്കിൽ x എത്ര?

(24) ഒരാൾ 234 ഉറുപ്പിക കൊടുത്തു കുറച്ചു കടകം വാങ്ങി. കടയുടെ വില 1 ഉറു. വീതം കുറവായിരുന്നെങ്കിൽ 2 കട കൂടുതൽ കിട്ടുമായിരുന്നു. എന്നാൽ വാങ്ങിയ കടകം എത്ര?

(25) ഒരാൾ 60 ഉറു. കൊടുത്തു കുറെ കോഴി വാങ്ങിച്ചു. ഓരോ കോഴിയുടെയും വില 12 അണ കൂടുതലായിരുന്നാൽ 4 കോഴി കുറവായി മാത്രമേ കിട്ടുകയുള്ളൂ. വാങ്ങിയ കോഴി എത്ര?

(26) ഒരു വ്യാപാരി 450 ഉറു. കൊടുത്തു കുറെ ആടുകളെ വാങ്ങി. അവയിൽ രണ്ടു ചത്തുപോയി ബാക്കി ഓരോന്നിനെയും 10 ഉറു. വീതം കൂട്ടി വിററപ്പോൾ ആകെ 20 ഉറു. ലാഭം കിട്ടിയാൽ വാങ്ങിയ ആടുകളുടെ എണ്ണം എത്ര?

(27) ഒരാൾ തന്റെ കൈവശമുണ്ടായിരുന്ന 45 ഉറുപ്പികയെ ഏതാനും ദിവസം കൊണ്ടു ചെലവാക്കുന്നു. ദിവസമൊന്നിന്നു 8 അണ. വീതം കുറച്ചു ചെലവാക്കിയിരുന്നെങ്കിൽ 3 ദിവസങ്ങൾക്കു കൂടി തികയുമായിരുന്നു എന്നാൽ ദിവസം എത്ര ഉറുപ്പികവീതം ചെലവാക്കി?

(25) 15 മൈൽ ദൂരമുള്ള ഒരു സ്ഥലത്തു ഒരു നിശ്ചിതസമയത്തിൽ പോയി ചേരേണ്ട ഒരാൾ, താൻ പുറപ്പെടാൻ നിശ്ചയിച്ചിരുന്ന സമയത്തെക്കാൾ 3 മിനിട്ടു താമസിച്ചു പുറപ്പെട്ടതിനാൽ മണിക്കൂറിൽ

½ മൈൽ വീതം കൂടുതൽ വേഗതയിൽ യാത്രചെയ്തു് നിശ്ചിതസമയത്തിൽപോയി ചേൎന്നു. അയാളുടെ വേഗത എന്തു്?

(29) 24 അ. നീളം 16 അ. വീതിയുള്ള ഒരു തോട്ടത്തിനു ചുററും വെളിയിലായി സമവീതിയിൽ ഒരു പാഥയുണ്ടു്. പാഥയുടെ വിസ്തീൎണ്ണം തോട്ടത്തിൻെറ വിസ്തീൎണ്ണത്തിനു സമമായാൽ പാഥയുടെ വീതിയെന്തു്?

(30) രണ്ടു സംഖ്യകളുടെ തുക 15. അവ രണ്ടോരോന്നിൽനിന്നും 1 വീതം കുറച്ചാൽ കിട്ടുന്ന സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലം 42. സംഖ്യകൾ ഏവ?

(31) ഒരു മോട്ടോർകാർ 90 മൈൽ ദൂരം ഒരു നിശ്ചിത വേഗതയിൽ പോകുന്നു. മണിക്കൂറിൽ 3 മൈൽ വീതം വേഗത കുറഞ്ഞിരുന്നാൽ ആ യാത്രയ്ക്കു് 1½ മണിക്കൂർ സമയം കൂടുതൽ വേണം. എന്നാൽ അതിൻെറ വേഗത എന്തു്?

(32) 60 അടി നീളം 40 അടി വീതിയുള്ള ഒരു തോട്ടത്തിൻെറ ചുററും അകത്തായി സമവീതിയിൽ ഒരു പാഥയുണ്ടു്. പാഥ ഒഴിച്ചു് ബാക്കിയുള്ള സ്ഥലത്തിൻെറ വിസ്തീൎണ്ണം 1,344 ച. അടിയായാൽ പാഥയുടെ വീതിയെന്തു്?

(33) ഒരു ദീൎഘചതുരത്തിൻെറ ചുററളവു് 42 അടി. നീളത്തിലും, വീതിയിലും നിന്നു് 3 അടിവീതം കുറച്ചാൽ വിസ്തീൎണ്ണം പകുതിയാകും. എന്നാൽ നീളവും വീതിയും കാണുക

(34) രണ്ടു അക്കങ്ങളുള്ള ഒരു സംഖ്യ അതിൻെറ അക്കങ്ങളുടെ തുകയുടെ 4 ഇരട്ടി. അതിൻെറ ഒന്നാം

സ്ഥാനത്തുള്ള അക്കം പത്താംസ്ഥാനത്തെ അക്കത്തിന്റെ വർഗ്ഗത്തെക്കാൾ 8 കുറവായാൽ സംഖ്യ ഏതു്?

(35) ഞാൻ 60 രൂപയ്ക്കു കുറെ പുസ്തകങ്ങൾ വാങ്ങിച്ചു. 5 പുസ്തകങ്ങൾ കൂടുതൽ കിട്ടിയിരുന്നെങ്കിൽ ഓരോ പുസ്തകത്തിന്റെയും വില 1 രൂപാ കുറവായിരിക്കും. വാങ്ങിയ പുസ്തകം എത്ര? ഒന്നിന്റെ വില എന്തു്?

(36) 120 രൂപാ കുറെ കുട്ടികൾക്കു സമമായി വീതിച്ചുകൊടുത്തു. 4 കുട്ടികൾ കുറവായിരുന്നെങ്കിൽ ഓരോ കുട്ടിക്കും 1 രൂപാ കൂടുതൽ കിട്ടുമായിരുന്നു. കുട്ടികളുടെ എണ്ണം എത്ര?

(37) ഒരു തൊട്ടിയിൽ വെള്ളം നിറയ്ക്കുന്ന രണ്ടു കുഴലുകൾ ഒരേ സമയത്തു് തുറന്നുവച്ചാൽ 18 മിനിട്ടിൽ തൊട്ടിനിറയും. ഒരു കുഴൽമാത്രംകൊണ്ടു് ആ തൊട്ടിയെ നിറയ്ക്കുന്നതിന് മറേറ കുഴലിനെക്കാൾ 15 മിനിട്ടു കൂടുതൽ സമയം വേണ്ടിവരുമെങ്കിൽ ഓരോ കുഴലിനും വേണ്ടിവരുന്ന സമയം കാണുക.

(38) ഒരു വണ്ടിയുടെ പിൻചക്രത്തിനു് മുൻചക്രത്തെക്കാൾ 1 അടി കൂടുതൽ ചുററളവുണ്ടു്. 1 മൈൽ ദൂരം പോകുമ്പോൾ മുൻചക്രം പിൻചക്രത്തെക്കാൾ 22 പ്രാവശ്യം കൂടുതൽ ചുററുന്നുവെങ്കിൽ ഓരോ ചക്രത്തിന്റേയും ചുററളവു് കാണുക.

അദ്ധ്യായം 8

സൂത്രവാക്യങ്ങൾ

(i) $(a + b + c)^2$

$= (\overline{a + b} + c)^2$

$= (a + b)^2 + 2\,(a + b)\,c + c^2$

$= a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2$

$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac.$

വികസനത്തിൽ കാണുന്ന രാശികളെ പരിശോധിക്കുക. ആദ്യത്തെ മൂന്നു രാശികളും യഥാക്രമം, ചോദ്യത്തിൽ തന്നിരിക്കുന്ന മൂന്നു രാശികളുടെയും വർഗ്ഗങ്ങളാണു്. ബാക്കിയുള്ളവ, ആ മൂന്നു രാശികളുടെയും ഈരണ്ടായുള്ള ഗുണനഫലങ്ങളുടെ ഇരട്ടി.

ഇതുപോലെതന്നെ മൂന്നിൽ കൂടുതൽ രാശികളുടെ തുകയുടെ വർഗ്ഗവും കാണാവുന്നതാണു്.

അഭ്യാസം 22

താഴെ തന്നിരിക്കുന്നവയുടെ വർഗ്ഗങ്ങൾ എഴുതുക:—

1. $a + x + y$
2. $x + a + 2b$
3. $2x + y + b$
4. $1 + x + x^2$
5. $a + 2x + 3y$
6. $a + 2b + 3$
7. $x^2 + ax + b$
8. $x^2 + px + q$

9. $x^2 + 2x + 3$

10. $2x + 3y + 5$

11. $a + x - y$

12. $a + x - 2b$

13. $x + y - 3$

14. $a^2 - a + 3$

15. $2a - 3b - c$

16. $x^2 - 2x - 3$

17. $ab + bc + ca$

18. $ax - bx - bc$

(ii) $(a + b)^3$ എന്നതിന്റെ വികസനം

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)(a+b)^2\\ &= (a+b)(a^2+2ab+b^2)\\ &= a(a^2+2ab+b^2) + b(a^2+2ab+b^2)\\ &= a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3\\ &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\end{aligned}$$

വികസനത്തിലെ ഓരോ രാശിയേയും പരിശോധിക്കുക. ആദ്യത്തെ രാശിയിൽ a യുടെ കൃതി 3. രണ്ടാമത്തേതിൽ a യുടെ കൃതി 2, b യുടെ കൃതി 1; രണ്ടു കൃതികളുടെയും കൂടിയുള്ള കൃതി 3. മൂന്നാമത്തെ രാശിയിൽ a യുടെ കൃതി ഒന്നായി കുറയുകയും b യുടെ കൃതി രണ്ടായി വർദ്ധിക്കുകയും ചെയ്യുന്നു. ഒടുവിലത്തെ രാശിയിൽ a ഇല്ല; b യുടെ കൃതി 3.

രണ്ടും മൂന്നും രാശികളിലെ ഗുണോത്തരം 3.

(iii) $$\begin{aligned}(a-b)^3 &= (a-b)(a-b)^2\\ &= (a-b)(a^2-2ab+b^2)\\ &= a(a^2-2ab+b^2) - b(a^2-2ab+b^2)\\ &= a^3-2a^2b+ab^2-a^2b+2ab^2-b^3\\ &= a^3-3a^2b+3ab^2-b^3\end{aligned}$$

$(a + b)^3$ എന്നതിന്റെ വികസനത്തിലെ രാശി മൂല്യങ്ങളും ഇതിലെ രാശികളുമായി താരതമ്യം

ചെയ്യുക ചിഹ്നത്തിൽ മാത്രമെ അല്പം വ്യത്യാസമുള്ളു. എന്നു മനസ്സിലാകാവുന്നതാണു്. രണ്ടാമത്തെയും നാലാമത്തെയും ചിഹ്നങ്ങൾ ന്യൂനചിഹ്നങ്ങളായിരിക്കുന്നു. ബാക്കി എല്ലാ അംശങ്ങളിലും രണ്ടു വികസനങ്ങളും ഒന്നുപോലെ തന്നെയാണു്.

അദ്ധ്യായം 23

താഴെ തന്നിരിക്കുന്നവ ഓരോന്നിന്റെയും മൂന്നാം കൃതി എഴുതുക:—

1. $a+x$ 2. $b+y$ 3. $x+m$
4. $x+1$ 5. $a+3$ 6. $y+2$
7. $4+b$ 8. $5+x$ 9. $6+m$
10. $2x+1$ 11. $3a+2$ 12. $x+3b$
13. $2a+3b$ 14. $3x+2y$ 15. $2x+5y$
16. $5a+3b$ 17. $ab+1$ 18. $xy+2$
19. $3+ab$ 20. $ab+xy$ 21. $2ab+3$
22. $3x+4ab$ 23. a^2+1 24. a^2+x
25. $a+x^2$ 26. a^2+b^2 27. $2x^2+3y^2$
28. $\frac{a}{b}+1$ 29. $ab+\frac{1}{2}$ 30. $\frac{a}{b}+\frac{x}{y}$
31. $x-a$ 32. $b-c$ 33. $2x-1$
34. $x-2y$ 35. $2x-3y$ 36. $3a-4$
37. $5x-3y$ 38. $3x-4ab$ 39. $ab-xy$
40. $3x-4ab$ 41. a^2-3 42. x^2-1
43. $a-x^2$ 44. a^2-b^2 45. $ab-\frac{1}{2}$

(iv) $(a+b)(a^2-ab+b^2)$

$= a(a^2-ab+b^2)+b(a^2-ab+b^2)$

$= a^3-a^2b+ab^2+a^2b-ab^2+b^3$

$= \underline{\underline{a^3+b^3}}$

(v) $(a - b)(a^2 + ab + b^2)$

$= a(a^2 + ab + b^2) - b(a^2 + ab + b^2)$

$= a^3 + a^2b + ab^2 - a^2b - ab^2 - b^3$

$= \underline{a^3 - b^3}$

ഘടകങ്ങളെയും ഗുണനഫലങ്ങളെയും പരിശോധിച്ചു അവയ്ക്കു തമ്മിലുള്ള സംബന്ധങ്ങളെല്ലാം മനസ്സിലാക്കുക.

അഭ്യാസം 24

താഴെ തന്നിരിക്കുന്നവയുടെ ഗുണനഫലങ്ങൾ കാണുക:—

1 $(m+n)(m^2 - mn + n^2)$

2. $(a + x)(a^2 - ax + x^2)$

3 $(p + q)(p^2 - pq + q^2)$

4 $(a+1)(a^2 - a + 1)$

5 $(x+2)(x^2 - 2x + 4)$

6 $(m+3)(m^2 - 3m + 9)$

7. $(3+a)(9 - 3a + a^2)$

8 $(xy+1)(x^2y^2 - xy + 1)$

9 $(ab+c)(a^2b^2 - abc + c^2)$

10. $(2xy + a)(4x^2y^2 - 2axy + a^2)$

11. $(m-n)(m^2 + mn + n^2)$

12 $(x-y)(x^2 + xy + y^2)$

13. $(m-p)(m^2 + mp + p^2)$

14. $(x-2y)(x^2 + 2xy + 4y^2)$

15. $(a-3b)(a^2 + 3ab + 9b^2)$

16. $(2x-3y)(4x^2 + 6xy + 9y^2)$

17. $(2x \quad 5y)(4x^2 + 10xy + 25y^2)$

18. $(3x - 4y (9x^2 + 12xy + 16y^2)$

19. $(a^2 - b)(a^4 + a^2b + b^2)$

20. $(x^2 - y^2)(x^4 + x^2y^2 + y^4)$

സൂത്രങ്ങളെ ഉപയോഗിച്ചുള്ള ഘടകക്രിയ

(ഉദാ:) (i) $a^3 + b^3 \equiv (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

ഘടകക്രിയ ചെയ്യുക: $27x^3 + 8y^3$

$$27x^3 + 8y^3 = (3x)^3 + (2y)^3$$
$$= (3x + 2y)(9x^2 - 6xy + 4y^2)$$

(ii) $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

(ഉദാ;) ഘടകക്രിയ ചെയ്യുക: $x^3 - 64$

$$x^3 - 64 = x^3 - 4^3$$
$$= (x - 4)(x^2 + 4x + 16)$$

അഭ്യാസം 25

ഘടകക്രിയ ചെയ്യുക:—

1. $x^3 + 27$
2. $x^3 + 1$
3. $y^3 + 8$
4. $m^3 + 64$
5. $x^3y^3 + 1$
6. $1 + 8x^3$
7. $x^3 - 1$
8. $1 - x^3$
9. $1 - 27a^3$
10. $8x^3 - 1$
11. $125x^3 - a^3$
12. $1 + a^3x^3$
13. $27x^3 - 64$
14. $1 + x^6$
15. $x^6 - 1$
16. $8 - x^6$
17. $x^6 - y^6$
18. $1000a^3 - 1$
19. $x^6 + a^3$
20. $8a^3 - 27b^3$
21. $(a + b)^3 + c^3$
22. $(a + b) - x^3$
23. $(a + x)^3 - 27$
24. $x^3 - (a - b)^3$

അദ്ധ്യായം 9

ക്ഷേത്രഗണിതം

ഉപപാദ്യം 1.

രണ്ടു ഋജുരേഖകൾ പരസ്പരം ഛേദിച്ചാൽ, എതിർകോണുകൾ തുല്യമായിരിക്കും.



ദത്തം:— AB,CD എന്നീ രേഖകൾ പരസ്പരം O എന്ന ബിന്ദുവിൽ ഛേദിക്കുന്നു.

അനുമാനം:— $\angle AOC = \angle BOD$

$\angle AOD = \angle BOC$

അഭ്യാസം 26.

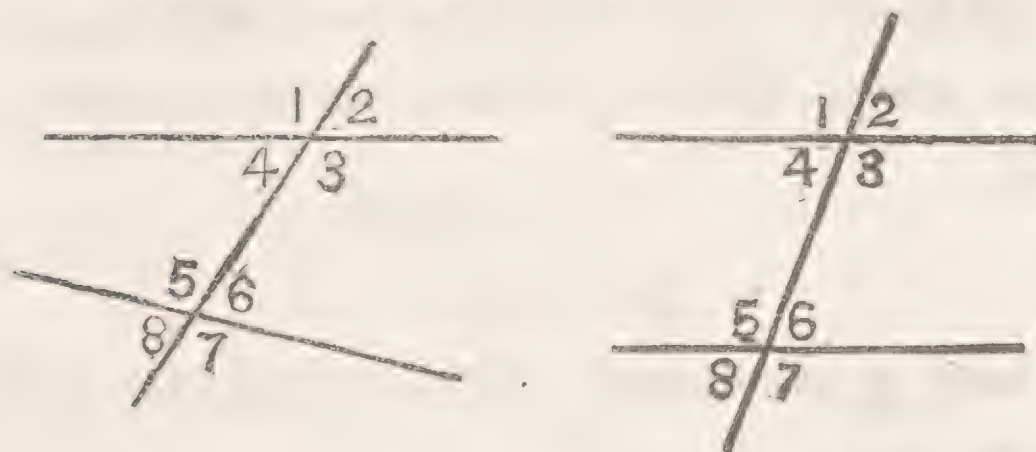
1. PQ, RS എന്ന നേർവരകൾ O യിൽ പരസ്പരം ഛേദിക്കുന്നു. $\angle POR = 40^\circ$ ആയാൽ $\angle POS$, $\angle QOS$, $\angle QOR$ ഇവയുടെ അളവു കാണുക.

2 മുൻചോദ്യത്തിൽ $\angle POR = x^\circ$ ആയാൽ, മററു കോണുകളുടെ അളവു കാണുക.

3. ഒരു ജോടി എതിർകോണുകളുടെ സമഭാജികൾ ഒരു നേർവരയായിരിക്കുമെന്നു തെളിയിക്കുക.

4. ഒരു ജോടി എതിർകോണുകളിൽ ഒന്നിന്റെ സമഭാജി മറ്റതിന്റേയും സമഭാജിയാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

5. XY, AB എന്നീ ഋജുരേഖകൾ O യിൽ പരസ്പരം ഛേദിക്കുന്നു. AOX, BOX എന്നീ കോണുകൾ 2:3 എന്ന അംശബന്ധത്തിലാണെങ്കിൽ, പടത്തിലുള്ള എല്ലാ കോണുകളുടെയും അളവു കാണുക.



രണ്ടു നേർവരകളെ വേറൊരു നേർവര ഛേദിക്കുമ്പോൾ, രണ്ടു ബിന്ദുക്കളിലായി എട്ടു കോണുകൾ ഉണ്ടാകുന്നു. ചിത്രത്തിൽ ഇവയെ ഒന്നുമുതൽ എട്ടുവരെയുള്ള സംഖ്യകൾകൊണ്ടു കുറിച്ചിരിക്കുന്നു.

ഇവയിൽ,

1, 5
2, 6
3, 7
4, 8 } എന്നിവ നാലു ജോടി സമസ്ഥാനീയ കോണുകളാണു. (Corresponding angles)

4, 6 } എന്നിവ രണ്ടു ജോടി ഏകാന്തര
3, 5 } കോണുകൾ (Alternate angles)

1, 2, 7, 8 എന്നിവ ബാഹ്യകോണുകൾ
(Exterior angles)

3, 4, 5, 6 ഇവ ആന്തരകോണുകൾ
(Interior angles)

ആന്തരകോണുകളിൽ 3, 6 എന്നിവ ഛേദകരേഖയുടെ ഒരേവശത്തായി സ്ഥിതിചെയ്യുന്നതുകൊണ്ടു, അവയെ 'പാർശ്വാന്തരകോണുകൾ' എന്നു പറയുന്നു. അതുപോലെ 4, 5 എന്നീ കോണുകളും പാർശ്വാന്തര കോണുകളാണു്.

മുകളിൽ പറഞ്ഞ കോണുകൾക്കു തമ്മിലുള്ള ബന്ധം അടുത്ത രണ്ടു ഉപപാദ്യങ്ങൾ മുഖേന അറിയാവുന്നതാണു്.

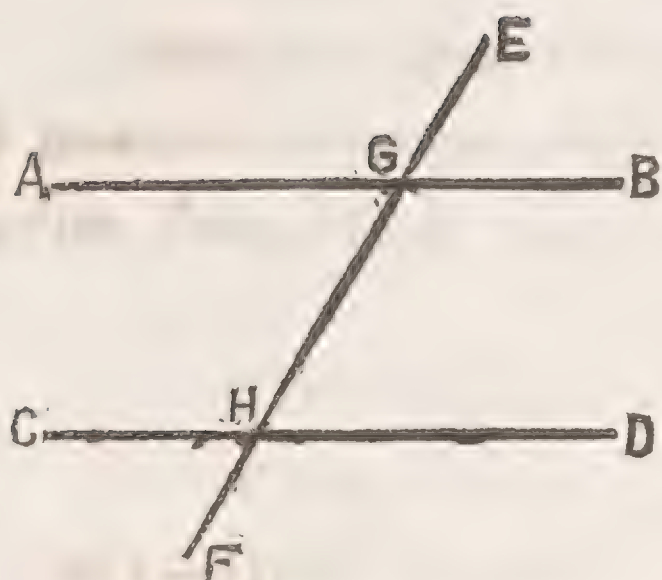
ഉപപാദ്യം 2.

രണ്ടു ഋജുരേഖകളെ വേറൊരു ഋജുരേഖ ഖണ്ഡിക്കുമ്പോഴുണ്ടാകുന്ന,

(i) ഒരു ജോടി സമസ്ഥാനീയ കോണുകൾ തുല്യമായാൽ, ആ രണ്ടു രേഖകളും സമാന്തരമായിരിക്കും.

(ii) ഒരു ജോടി ഏകാന്തരകോണുകൾ തുല്യമായാൽ ആ രേഖകൾ സമാന്തരമായിരിക്കും.

(iii) ഒരു ജോടി പാർശ്വാന്തരകോണുകളുടെ തുക 180° ആയാൽ ആ രേഖകൾ സമാന്തരമായിരിക്കും.



ദത്തം:—AB, CD എന്നീ രേഖകളെ EF എന്ന ഛേദകരേഖ യഥാക്രമം G, H എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ ഖണ്ഡിക്കുന്നു.

(i) $\angle EGB = \angle GHD$

(ii) $\angle AGH = \angle GHD$

(iii) $\angle BGH + \angle GHD = 180^\circ$

അനുമാനം:—ഓരോന്നിലും $AB \parallel CD$.

ഉപപാദ്യം 3

(ഉപപാദ്യം 2-ന്റെ വിപരീതം)

രണ്ടു സമാന്തരരേഖകളെ ഒരു ഛേദകരേഖ ഖണ്ഡിക്കുമ്പോഴുണ്ടാകുന്ന,

(i) സമസ്ഥാനീയ കോണുകൾ തുല്യമായിരിക്കും

(ii) ഏകാന്തര കോണുകൾ തുല്യമായിരിക്കും

(iii) പാർശ്വാന്തരകോണുകളുടെ തുക 180° ആയിരിക്കും.

(ഉപപാദ്യം 2-ന്റെ ചിത്രം നോക്കുക)

ദത്തം:—AB,CD എന്ന സമാന്തര രേഖകളെ EF എന്ന ഛേദക രേഖ യഥാക്രമം G,H എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ ഖണ്ഡിക്കുന്നു.

അനുമാനം:— (i) $\angle EGB=\angle GHD$

(ii) $\angle AGH=\angle GHD$

(iii) $\angle BGH+\angle GHD=180^\circ$

അദ്ധ്യായം 27

1. AB,CD എന്നീ രേഖകൾ ഓരോന്നും XY എന്ന ഋജുരേഖയ്ക്കു ലംബമായിരുന്നാൽ $AB \parallel CD$ എന്നു സമർത്ഥിക്കുക.
2. ABCD എന്ന ചതുർഭുജത്തിൽ $\angle A+\angle B=180^\circ$ $\angle B+\angle C=180^\circ$, ആയാൽ ചതുർഭുജത്തിന്റെ എതിർ വശങ്ങൾ സമാന്തരമെന്നു തെളിയിക്കുക.
3. ഒരു ദീർഘചതുരത്തിന്റെ എതിർവശങ്ങൾ സമാന്തരമെന്നു സ്ഥാപിക്കുക.
4. ABCD ഒരു ചതുർഭുജം. $AD \parallel BC$, $\angle A=55^\circ$ $\angle D=70^\circ$ ആയാൽ B,C എന്നീ കോണുകളുടെ അളവുകൾ കാണുക.
5. AB,CD എന്നീ സമാന്തരരേഖകളെ XY എന്ന ഛേദകം യഥാക്രമം P Q എന്നീ ബിന്ദു

ക്കളിൽ ഛേദിക്കുന്നു. $\angle APQ = x^\circ$ ആയാൽ ചിത്രത്തിലുള്ള ബാക്കി കോണുകളുടെ അളവു കാണുക.

6. എതിർവശങ്ങൾ സമാന്തരമായുള്ള ഒരു ചതുർഭുജത്തിൽ ഒരു കോൺ 90° ആയാൽ ബാക്കി കോണുകൾ ഓരോന്നും 90° എന്നു തെളിയിക്കുക.

7. ABC ഒരു ത്രികോണം. A യിൽ കൂടി BC ക്കു ഒരു സമാന്തരം വരച്ചു, ABC യുടെ മൂന്നു കോണുകളുടെയും തുക 180° എന്നു സമാപിക്കുക.

8. രണ്ടു സമാന്തരരേഖകളെ ഒരു ഛേദകം ഛേദിക്കുമ്പോഴുണ്ടാകുന്ന ഒരു ജോടി ഏകാന്തരകോണുകളുടെ സമഭാജികൾ സമാന്തരമെന്നു സമത്ഥിക്കുക.

9. രണ്ടു സമാന്തരരേഖകളെ ഒരുഛേദകം ഖണ്ഡിക്കുമ്പോഴുണ്ടാകുന്ന ഒരു ജോടി സമസ്ഥാനീയകോണുകളുടെ സമഭാജികൾ സമാന്തരമെന്നു തെളിയിക്കുക.

10. രണ്ടു സമാന്തരരേഖകളെ ഒരു ഛേദകം ഖണ്ഡിക്കുമ്പോഴുണ്ടാകുന്ന നാലു ആന്തരകോണുകളുടെയും സമഭാജികൾ ചേൎന്നുണ്ടാകുന്ന ചതുർഭുജം ഒരു ദീർഘചതുരമാണെന്നു സമത്ഥിക്കുക.

11. $AB \| XY$, $CD \| XY$ ആയാൽ $AB \| CD$ എന്നു തെളിയിക്കുക. (N. B. മൂന്നു രേഖകളെ

യും ഖണ്ഡിക്കുന്ന ഒരു ഛേദകം വരച്ചു, സമസ്ഥാനീയ കോണുകളെ പരിശോധിക്കുക)

12. എതിർ വശങ്ങൾ സമാന്തരമായുള്ള ഒരു ചതുർഭുജത്തിലെ എതിർകോണുകൾ തുല്യമെന്നു തെളിയിക്കുക.

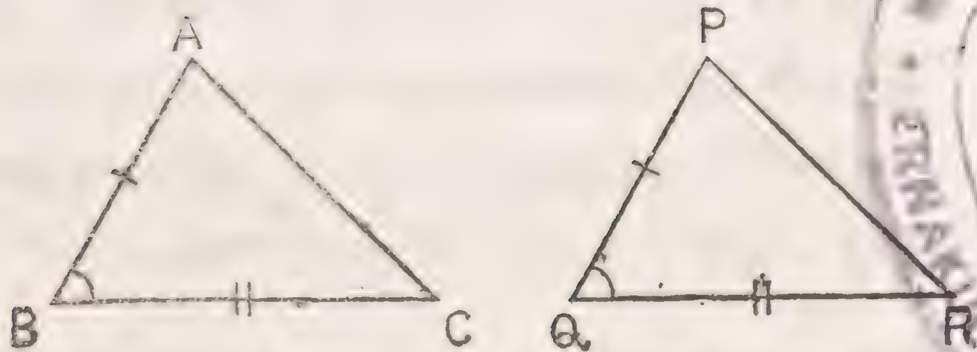
13. AB ഒരു ഋജുരേഖ. P വെളിയിലുള്ള ഒരു ബിന്ദു. P യിൽക്കൂടി AB ക്കു ഒരു സമാന്തരം വരയ്ക്കുക.

14. AB എന്ന ഋജുരേഖയിൽ നിന്നു 1·2" ദൂരത്തിൽ P എന്ന ബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്തി P യിൽക്കൂടി AB ക്കു ഒരു സമാന്തരം വരയ്ക്കുക.

N. B. എല്ലാവിധത്തിലും തുല്യമായിരിക്കുന്ന ത്രികോണങ്ങൾ 'സർവ്വസമം' (Congruent) എന്നു പറയുന്നു. അതിനെ കുറിക്കുന്ന അടയാളം $\equiv$.

ഉപപാദ്യം 4

രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളിൽ ഒന്നിന്റെ രണ്ടു വശങ്ങളും അവയ്ക്കിടയ്ക്കുള്ള കോണും, യഥാക്രമം മററതിന്റെ രണ്ടു വശങ്ങളോടും ഇടയ്ക്കുള്ള കോണിനോടും തുല്യമായിരുന്നാൽ രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളും സർവ്വസമമായിരിക്കും.



ദത്തം: ABC, PQR എന്നീ ത്രികോണങ്ങളിൽ $AB = PQ$, $BC=QR$, $\angle B=\angle Q$.

അനുമാനം: $\triangle ABC \equiv \triangle PQR$.

N. B. രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളും സർവ്വസമമായിരിക്കു ന്നതുകൊണ്ടു, ബാക്കി ഭാഗങ്ങളും പരസ്പരം തുല്യ മായിരിക്കും. അതായതു $AC = PR$, $\angle A = \angle P$, $\angle C=\angle R$.

രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളുടെയും വിസ്തീർണ്ണവും തുല്യമാ യിരിക്കും.

അഭ്യാസം 28

---

1. ABCD ഒരു സമചതുരം. BC യുടെ മദ്ധ്യ ബിന്ദു P ആയാൽ $AP=DP$ എന്നു തെളിയിക്കുക.
2. ABCD ഒരു സമചതുരം. $AC=BD$ എന്നു സമർത്ഥിക്കുക.
3. ABC എന്ന സമദ്വിഭുജത്രികോണത്തിൽ $AB=AC$. $\angle A$യുടെ സമഭാജി BC യെ Dയിൽ സന്ധി ച്ചാൽ $BD = CD$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

4. ABCD എന്ന സമചതുരത്തിൽ P, Q, R എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ യഥാക്രമം AB, BC, CD എന്നീ വശങ്ങളുടെ മദ്ധ്യബിന്ദുക്കളായാൽ $PQ = QR$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

5. ഒരു ഋജുരേഖയുടെ മദ്ധ്യലംബത്തിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്ന ഒരു ബിന്ദു, രേഖയുടെ അഗ്രങ്ങളിൽ നിന്നു സമദൂരത്തായിരിക്കുമെന്നു സ്ഥാപിക്കുക.

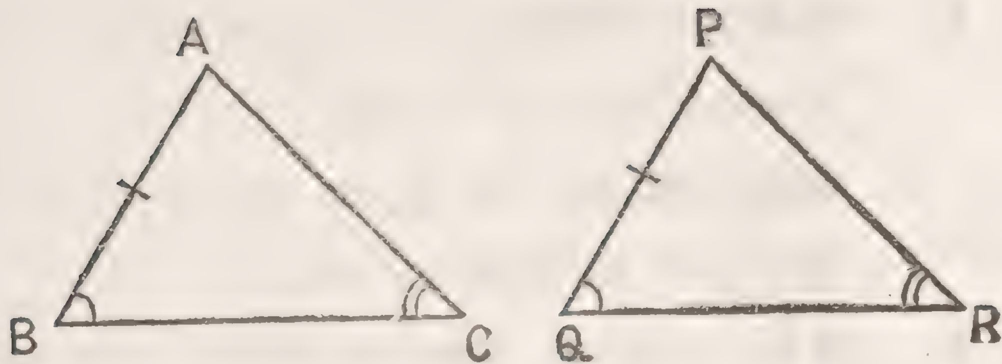
6. ABC എന്ന ത്രികോണത്തിൽ $AB = AC$. $\angle A$യുടെ സമഭാജി BC യുടെ മദ്ധ്യലംബമായിരിക്കുമെന്നു സമർത്ഥിക്കുക.

7. AB, CD എന്നീ രേഖകൾ പരസ്പരം സമഭാജികളാണ്. $AC \parallel DB$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

8. ABCD എന്ന ചതുർഭുജത്തിൽ $AB = CD$, $\angle B = \angle C$ ആയാൽ $AC = BD$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

ഉപപാദ്യം 5.

രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളിൽ ഒന്നിന്റെ രണ്ടു കോണുകളും ഒരു വശവും യഥാക്രമം മററതിന്റെ രണ്ടു കോണിനോടും അനുരൂപ വശത്തിനോടും തുല്യമായാൽ ത്രികോണങ്ങൾ രണ്ടും സർവ്വസമമാണ്.



<u>ദത്തം</u>:—ABC, PQR എന്നീ ത്രികോണങ്ങളിൽ

$\angle B = \angle Q$, $\angle C = \angle R$, $AB = PQ$.

<u>അനുമാനം</u>:—$\triangle ABC \equiv \triangle PQR$.

അഭ്യാസം 29.

---

1. ഒരു കോണിന്റെ സമഭാജിയിലുള്ള ഏതെങ്കിലും ഒരു ബിന്ദു, കോണിന്റെ ഭുജങ്ങളിൽ നിന്നു സമദൂരത്തിൽ സ്ഥിതിചെയ്യുമെന്നു തെളിയിക്കുക.

2. ABC ഒരു ത്രികോണം. D,E എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ യഥാക്രമം AB,AC എന്ന വശങ്ങളുടെ മദ്ധ്യബിന്ദുക്കളാണു്. A, B, C എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽനിന്നു DE ക്കു് വരയ്ക്കുന്ന ലംബങ്ങളുടെ നീളം തുല്യമെന്നു സമർത്ഥിക്കുക.

3. ABC എന്ന ത്രികോണത്തിൽ $\angle A$യുടെ സമഭാജി BC ക്കു് ലംബമായാൽ $AB = AC$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

4. സർവ്വസമങ്ങളായ ത്രികോണങ്ങളിൽ സമസ്ഥാനീയ ശീർഷങ്ങളിൽനിന്നു എതിർവശങ്ങളിലേക്കു വരയ്ക്കുന്ന ലംബങ്ങളുടെ നീളം തുല്യമെന്നു സ്ഥാപിക്കുക.

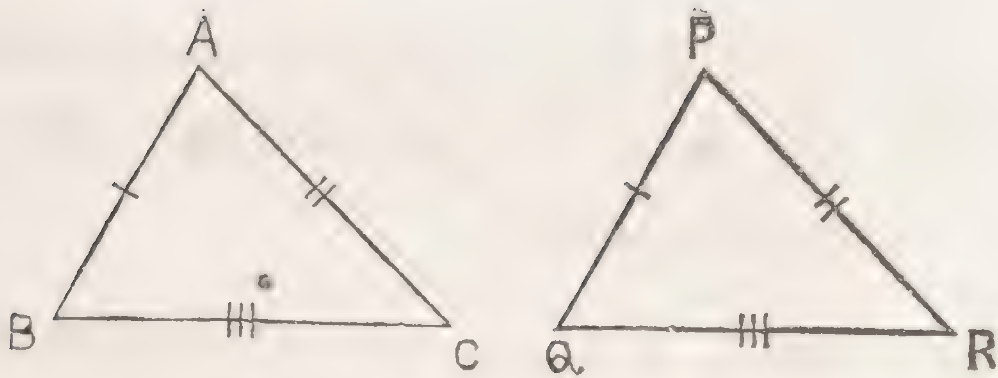
5. ABC എന്ന കോണിന്റെ സമഭാജി BX ആണു്. PQR എന്ന നേർവര BXനു ലംബമായി വരച്ചിരിക്കുന്നു. അതു് AB യെ P യിലും, BC യെ R എന്ന ബിന്ദുവിലും ഛേദിക്കുന്നെങ്കിൽ $\Delta BPQ \equiv \Delta BRQ$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

6. PQ എന്ന നേർവരയുടെ മദ്ധ്യബിന്ദു R. R എന്ന ബിന്ദുവിൽക്കൂടി പോകുന്ന ഏതെങ്കിലും ഒരു നേർവരയ്ക്കു ലംബമായി P യിൽനിന്നു PAയും, Q വിൽനിന്നു QBയും വരച്ചാൽ PA=QB എന്നു സമർത്ഥിക്കുക.

7. ABC ഒരു ത്രികോണം. B, C എന്നീ കോണുകളുടെ സമഭാജികൾ I എന്ന ബിന്ദുവിൽ സന്ധിക്കുന്നു. I യിൽനിന്നു മൂന്നു വശങ്ങൾക്കും വരയ്ക്കുന്ന ലംബങ്ങളുടെ നീളം തുല്യമെന്നു തെളിയിക്കുക

ഉപപാദ്യം 6

ഒരു ത്രികോണത്തിലെ മൂന്നു വശങ്ങളും യഥാക്രമം വേറൊരു ത്രികോണത്തിലെ മൂന്നു വശങ്ങളോടും തുല്യമായാൽ, രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളും സർവ്വസമമായിരിക്കും.



ദത്തം:— ABC, PQR എന്നീ ത്രികോണങ്ങളിൽ $AB = PQ$, $AC = PR$, $BC = QR$

അനുമാനം:—$\triangle ABC \equiv \triangle PQR$.

അഭ്യാസം 30

---

1. ഒരു ചതുർഭുജത്തിന്റെ എതിർവശങ്ങൾ തുല്യമായാൽ, അതിന്റെ എതിർ കോണുകൾ തുല്യമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

2. ഒരു ചതുർഭുജത്തിന്റെ എതിർവശങ്ങൾ തുല്യമായാൽ അവ സമാന്തരമായിരിക്കുമെന്നു സമർത്ഥിക്കുക.

3. ABC എന്ന ത്രികോണത്തിൽ $AB = AC$. B,C എന്ന കോണുകളുടെ സമഭാജികൾ O യിൽ സന്ധിക്കുന്നു. AO എന്ന രേഖ $\angle A$ യുടെ സമഭാജിയെന്നു തെളിയിക്കുക

4. P,Q കേന്ദ്രങ്ങളായുള്ള രണ്ടു വൃത്തങ്ങൾ A,B എന്ന ബിന്ദുക്കളിൽ പരസ്പരം ഛേദിക്കുന്നു.

(i) $\triangle PAQ \equiv \triangle pBQ$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

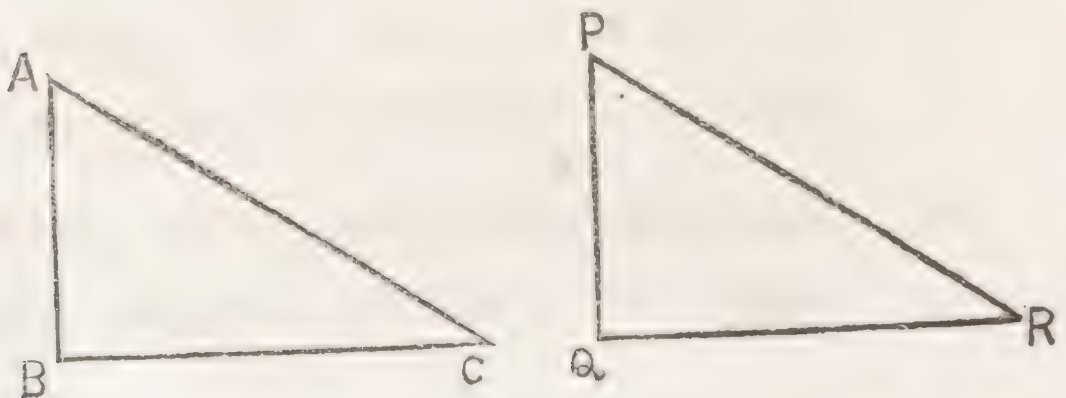
(ii) AB യുടെ മദ്ധ്യലംബമാണ് PQ എന്നു തെളിയിക്കുക.

5. XOY ഒരു കോണു്. O കേന്ദ്രമായുള്ള ഒരു വൃത്തം OX, OY എന്നീ ഭുജങ്ങളെ യഥാക്രമം A, B എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ സന്ധിക്കുന്നു.

A,B എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ കേന്ദ്രങ്ങളായുള്ള രണ്ടു തുല്യവൃത്തങ്ങൾ പരസ്പരം C യിൽ ഛേദിച്ചാൽ OC എന്ന രേഖ $\angle XOY$ യുടെ സമഭാജിയെന്നു തെളിയിക്കുക.

ഉപപാദ്യം 7

രണ്ടു മട്ടത്രികോണങ്ങളിൽ ഒന്നിന്റെ കർണ്ണവും വേറൊരു വശവും യഥാക്രമം മറ്റെ ത്രികോണത്തിലെ കർണ്ണത്തിനോടും വേറൊരു വശത്തിനോടും തുല്യമായാൽ രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളും സർവ്വസമമായിരിക്കും



ദത്തം.— ABC, PQR എന്നീ ത്രികോണങ്ങളിൽ ∠Bയും ∠Qവും മട്ടങ്ങളാണ് (Right angles) AC=PR, AB=PQ.

അനുമാനം:— △ ABC ≡ △ PQR.

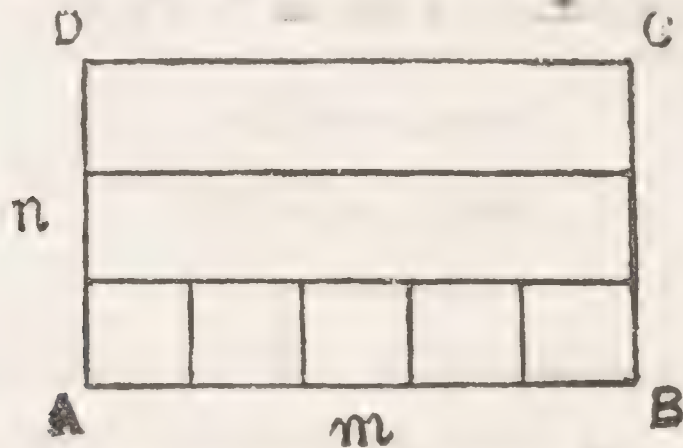
അദ്ധ്യായം 31

---

1. O കേന്ദ്രമായുള്ള ഒരു വൃത്തത്തിൽ AB ഒരു ഞാൺ. O യിൽ നിന്നു AB ക്കു വരയ്ക്കുന്ന ലംബം AB യുടെ സമഭാജിയായിരിക്കുമെന്നു തെളിയിക്കുക.
2. ABC എന്ന ത്രികോണത്തിൽ BD, CE എന്നിവ യഥാക്രമം AC, AB എന്നീ വശങ്ങളിലേക്കു ലംബങ്ങളാണ്. BD=CE ആയാൽ AB=AC എന്നു സമർത്ഥിക്കുക.
3. ABC എന്ന ത്രികോണത്തിൽ BC യുടെ മദ്ധ്യബിന്ദുവാണ് D. D യിൽനിന്നു AB, AC എന്ന വശങ്ങളിലേക്കു യഥാക്രമം DE DF എന്നീ ലംബങ്ങൾ വരച്ചിരിക്കുന്നു. DE=DF ആയാൽ AB=AC എന്നു തെളിയിക്കുക.
4. ABC എന്ന ത്രികോണത്തിൽ AB=AC. BC ക്കു ലംബമായി AD വരച്ചാൽ, AD, ത്രികോണത്തെ രണ്ടു തുല്യഭാഗങ്ങളാക്കുമെന്നു തെളിയിക്കുക.

ഉപപാദ്യം 8

ഒരു ചതുരത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം അതിന്റെ നീളം, വീതി, ഈ അളവുകളുടെ ഗുണനഫലമാണു്.



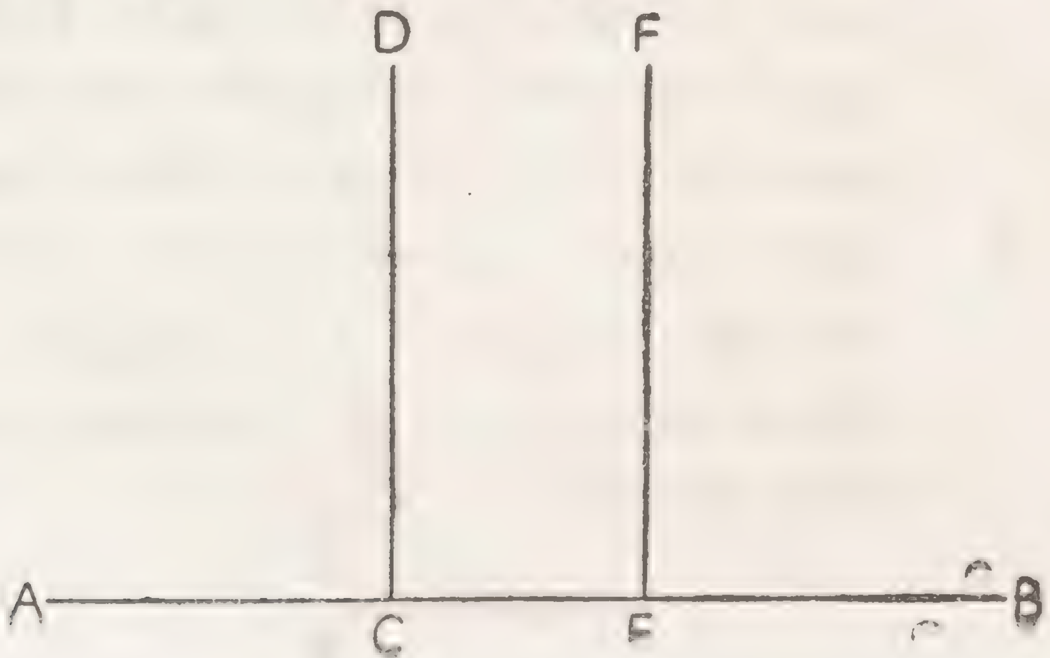
ദത്തം:—ABCD ഒരു ചതുരം. AB യുടെ നീളം m ഏകകങ്ങൾ. AD യുടെ നീളം n ഏകകങ്ങൾ.

അനുമാനം:—

ABCD യുടെ വിസ്തീർണ്ണം $= m \times n$ ചതുരശ്ര ഏകകങ്ങൾ.

ഉപപാദ്യം 9 (a)

ഒരേ ഋജുരേഖയ്ക്കു ലംബമായിരിക്കുന്ന രണ്ടു ഋജുരേഖകൾ പരസ്പരം സമാന്തരങ്ങളായിരിക്കും.



ദത്തം:— CD,EF എന്നീ രേഖകൾ ഓരോന്നും AB ക്കു ലംബങ്ങളാണ്.

അനുമാനം:— $CD \parallel EF$.

ഉപപത്തി;— $CD \perp AB$

$$\therefore \angle ACD = 90^\circ$$

അതുപോലെ തന്നെ $\angle CEF = 90^\circ$

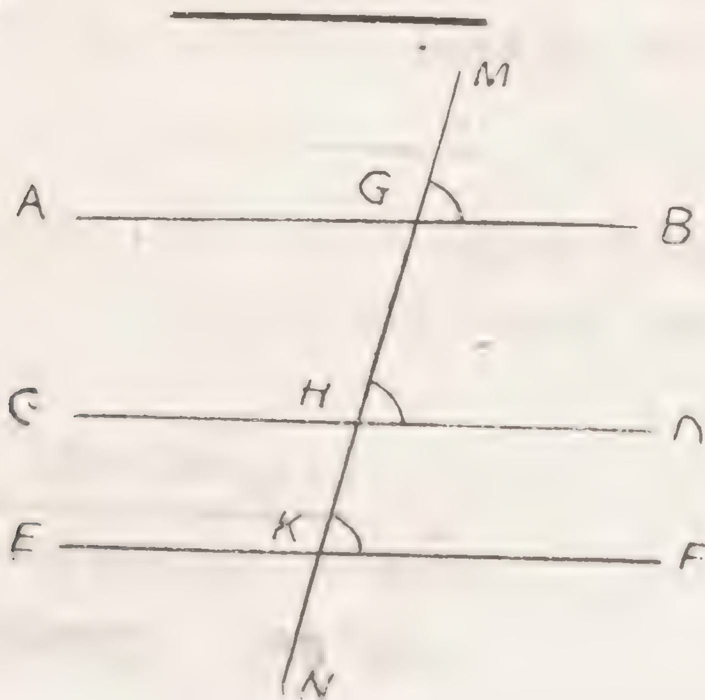
$$\therefore \angle ACD = \angle CEF$$

എന്നാൽ, ഈ കോണുകൾ CD,EF എന്നീ രേഖകളെ AB ഛേദിക്കുന്നതു കൊണ്ടുണ്ടാകുന്ന ഏകാന്തരകോണുകളാണ്.

$$\therefore CD \parallel EF$$

ഉപപാദ്യം 9 (b)

ഒരേ ഋജുരേഖയ്ക്കു സമാന്തരങ്ങളായിരിക്കുന്ന രണ്ടു ഋജുരേഖകൾ പരസ്പരം സമാന്തരങ്ങളായിരിക്കും.



ദത്തം:— CD,EF എന്നീ രേഖകൾ ഓരോന്നും AB ക്കു സമാന്തരം

അനുമാനം:—$CD \parallel EF$

ക്രിയ:—AB,CD EF എന്നീ രേഖകളെ യഥാക്രമം G,H,K എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ ഛേദിക്കുന്ന MN എന്ന രേഖ വരയ്ക്കുക.

ഉപപത്തി;—$AB \parallel CD$, MN ഛേദകരേഖ

$\therefore \angle MGB = \angle GHD$ (സമസ്ഥാനീയകോണുകൾ)

$AB \parallel EF$, MN ഛേദകരേഖ

$\therefore \angle MGB = \angle HKF$ (സമസ്ഥാനീയകോണുകൾ)

$\therefore GHD = \angle HKF$

എന്നാൽ ഇവ CD,EF എന്നീ രേഖകളെ MN ഛേദിക്കുന്നതുകൊണ്ടുണ്ടാകുന്ന സമസ്ഥാനീയ കോണുകളാണു്.

$\therefore CD \parallel EF$.

ഋജുരേഖാചിത്രങ്ങൾ :—

ഭുജങ്ങളുടെ എണ്ണം അനുസരിച്ചു ഏതാനും ചിത്രങ്ങളുടെ പേരുകൾ താഴെ ചേർക്കുന്നു:—

ഭുജങ്ങളുടെ എണ്ണം	ചിത്രത്തിന്റെ പേരു്.
3	ത്രിഭുജം, ത്രികോണം (Triangle)
4	ചതുർഭുജം (Quadrilateral)

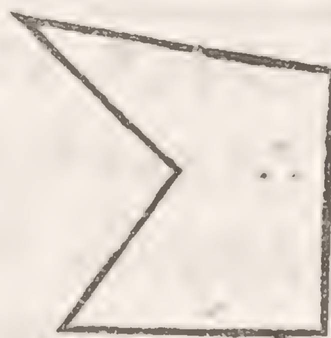
5	പഞ്ചഭുജം	(Pentagon)
6	ഷഡ്ഭുജം	(Hexagon)
7	സപ്തഭുജം	(Septagon)
8	അഷ്ടഭുജം	(Octagon)
9	നവഭുജം	(Nonagon)
10	ദശഭുജം	(Decagon)

പല ഭുജങ്ങളുള്ള ഒരു ചിത്രത്തിന്റെ പൊതുവായ പേരു 'ബഹുഭുജം' (Polygon) എന്നാണു്.

ഒരു ബഹുഭുജത്തിന്റെ കോണുകൾ ഒരോന്നും 180° ഡിഗ്രിയെക്കാൾ കുറവായിരുന്നാൽ അതിനെ ഉന്നമധ്യബഹുഭുജം (Convex polygon) എന്നും ഒരു കോണെങ്കിലും 180° യെക്കാൾ കൂടുതലായിരുന്നാൽ അതിനെ നതമധ്യബഹുഭുജം (Concave polygon) എന്നും പറയുന്നു



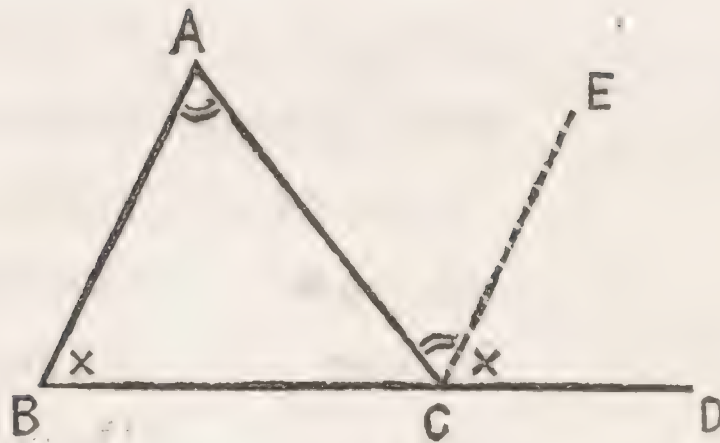
ഉന്നമധ്യബഹുഭുജം



നതമധ്യബഹുഭുജം

ഉപപാദ്യം 10 (i)

ഒരു ത്രികോണത്തിലെ ഒരു വശം ദീർഘിപ്പിച്ചാൽ ഉണ്ടാകുന്ന ബാഹ്യകോണു് അതിന്റെ എതിരെയുള്ള ആന്തര കോണുകളുടെ തുകയ്ക്കു് തുല്യമായിരിക്കും.



ദത്തം:—

ABC ഒരു ത്രികോണം.

BC യെ D വരെ ദീർഘിപ്പിച്ചിരിക്കുന്നു.

അനുമാനം:—$\angle ACD = \angle A + \angle B$

ക്രിയ:—AB ക്കു സമാന്തരമായി C യിൽകൂടി CE വരയ്ക്കുക.

ഉപപത്തി:—

$AB \parallel CE$, AC ഛേദകരേഖ.

$\therefore \angle A = \angle ACE$ (ഏകാന്തരകോണുകൾ)

$AB \parallel CE$, BD ഛേദകരേഖ

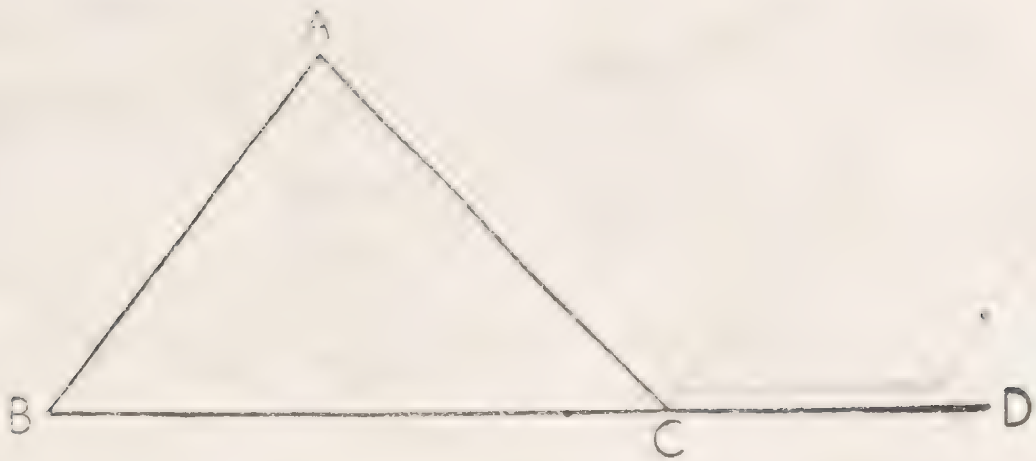
$\therefore \angle B = \angle ECD$ (സമസ്ഥാനീയ കോണുകൾ)

$\therefore \angle A + \angle B = \angle ACE + \angle ECD$

$= \angle ACD$

ഉപപാദ്യം 10 (ii)

ഒരു ത്രികോണത്തിലെ മൂന്നുകോണുകളുടെയും തുക 180°



ദത്തം:—ABC ഒരു ത്രികോണം

അനുമാനം:—$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$

ക്രിയ:—BC യെ D വരെ ദീർഘിപ്പിക്കുക.

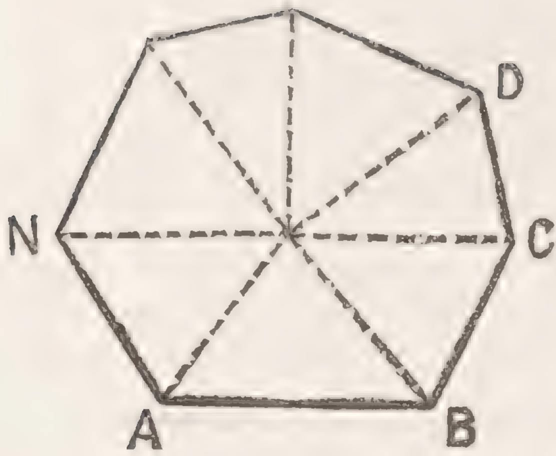
ഉപപത്തി:— ബാഹ്യകോണ് $ACD = \angle A + \angle B$
(എതിരെയുള്ള അന്തരകോണുകൾ)

ഈ സമവാക്യത്തിലെ ഓരോ വശത്തും $\angle ACB$ യെ കൂട്ടുമ്പോൾ,

$$\angle A + \angle B + \angle ACB = \angle ACD + \angle ACB$$
$$= \text{ഋജുകോൺ } BCD$$
$$= 180^\circ$$

ഉപപാദ്യം 11

n ഭുജങ്ങളുള്ള ഒരു ബഹുഭുജത്തിന്റെ അന്തരകോണുകളുടെ തുക $2n-4$ സമകോണുകളായിരിക്കും.



ദത്തം:—ABC...... N എന്നതു് n ഭുജങ്ങളുള്ള ഒരു ബഹുഭുജം

അനുമാനം:— ആന്തരകോണുകളുടെ തുക = $2n-4$ സമകോണുകൾ

ക്രിയ:—ബഹുഭുജത്തിനകത്തു O എന്ന ഒരു ബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്തുക. OA, OB, OC,...ON എന്നിവയെ ചേൎക്കുക.

ഉപപത്തി:—ബഹുഭുജം ഇപ്പോൾ n ത്രികോണങ്ങളായി ഭാഗിച്ചിരിക്കുന്നു.

ഒരു ത്രികോണത്തിലെ മൂന്നു കോണുകളുംകൂടി 2 സമകോണുകൾ.

∴ n ത്രികോണങ്ങളിലെയും കോണുകളുടെ തുക $2n$ സമകോണുകൾ.

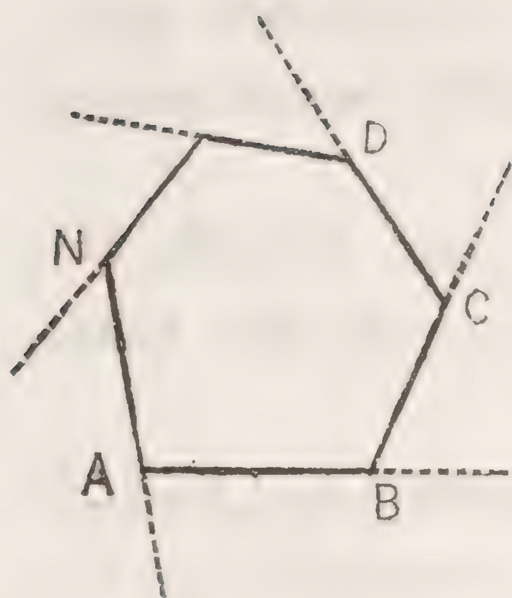
എന്നാൽ ഇവയിൽ, ബഹുഭുജത്തിൻെറ എല്ലാ കോണുകളും, O എന്ന ബിന്ദുവിലുള്ള എല്ലാ കോണുകളും ഉൾപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു.

O യിലുള്ള കോണുകളുടെ തുക = 4 സമകോണുകൾ.

∴ ബഹുഭുജത്തിൻെറ കോണുകൾ = $2n-4$ സമകോണുകൾ

അനുസിദ്ധാന്തം:—

ഒരു ഉന്മധ്യബഹുഭുജത്തിൻെറ എല്ലാ ഭുജങ്ങളെയും ഒരു ക്രമത്തിൽ ദീൎഘിപ്പിച്ചാൽ ഉണ്ടാകുന്ന ബാഹ്യകോണുകളുടെ തുക 4 സമകോണങ്ങളായിരിക്കും.



ദത്തം:— ABC.... N എന്നതു n ഭുജങ്ങളുള്ള ഒരു ബഹുഭുജമാണ്. അതിന്റെ ഭുജങ്ങൾ ഒരേ ക്രമത്തിൽ ദീർഘിപ്പിച്ചിരിക്കുന്നു

അനുമാനം : — ബാഹ്യകോണുകളുടെ തുക 4 സമകോണുകൾ

ഉപപത്തി:—

A യിലുള്ള ആന്തരകോൺ + ബാഹ്യകോൺ $=2$ സമകോൺ.

അതുപോലെ, ബഹുഭുജത്തിലെ n കോണുകളിലുമുള്ള എല്ലാ ആന്തരകോണുകളുടെയും, ബാഹ്യകോണുകളുടെയും തുക $= 2n$ സമകോണുകൾ.

എന്നാൽ, ആന്തരകോണുകൾ $= 2n - 4$ സമകോണുകൾ.

∴ ബാഹ്യകോണുകൾ $= 2n - (2n - 4)$,,

$= 2n - 2n + 4$,,

$= 4$ സമകോണുകൾ.

അദ്ധ്യായം 32

---

1. ഒരു ത്രികോണത്തിലെ രണ്ടു കോണുകളുടെ തുക 90° ആയാൽ ബാക്കി കോൺ ഒരു സമകോണായിരിക്കുമെന്നു തെളിയിക്കുക.

2. ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ കോണുകൾ തുല്യമായാൽ ഓരോ കോണിന്റെയും അളവു കാണുക.

3. ഒരു ത്രികോണത്തിലെ ഒരു കോൺ$=40^\circ$ മറ്റെ കോണുകൾ തുല്യമായാൽ അവ ഓരോന്നും എത്ര ഡിഗ്രി?

4. ABC എന്ന ത്രികോണത്തിൽ $\angle A=\angle B=2\angle C$ ആയാൽ ഓരോന്നും എത്ര ഡിഗ്രി?

5. **ABC എന്ന** ത്രികോണത്തിൽ $\angle B, \angle C$ എന്നിവയുടെ സമഭാജികൾ O യിൽ സന്ധിക്കുന്നു. $\angle BOC=90+\frac{A}{2}$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

6. ABC എന്ന ത്രികോണത്തിൽ BC എന്ന ഭുജത്തെ D വരെ ദീർഘിപ്പിച്ചിരിക്കുന്നു. ABC, ACD എന്നീ കോണുകളുടെ സമഭാജികൾ Eയിൽ സന്ധിക്കുന്നു. $\angle BEC=\frac{1}{2} A$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

7. ഒരു ചതുർഭുജത്തിന്റെ ഒരു കർണ്ണം (diagonal) വരച്ച്, ചതുർഭുജത്തിലെ അന്തരകോണുകളുടെ തുക 4 സമകോണമെന്നു തെളിയിക്കുക.

8. ABC ഒരു ത്രികോണം. $\angle A$ യുടെ സമഭാജി BC യെ D യിൽ സന്ധിക്കുന്നു. BC യെ E വരെ ദീർഘിപ്പിച്ചാൽ $\angle ABC+\angle ACE$ $=2\angle ADE$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

9. ABC ഒരു ത്രികോണം. BC യിൽ ഏതെങ്കിലും ഒരു ബിന്ദുവാണ് D. AD വരച്ച്,

ABC എന്ന ത്രികോണത്തിലെ ആന്തരകോണുകളുടെ തുക 180° എന്നു സമർത്ഥിക്കുക.

അഭ്യാസം 33.

---

10. ABCD ഒരു ചതുർഭുജം. A, B എന്നീ കോണുകളുടെ സമഭാജികൾ E യിൽ സന്ധിച്ചാൽ, $\angle C + \angle D = 2\angle E$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

11. ഒരു ചതുർഭുജത്തിലെ എതിർ കോണുകൾ തുല്യമായാൽ, അതിന്റെ എതിർഭുജങ്ങൾ സമാന്തരങ്ങളാണെന്നു സമർത്ഥിക്കുക.

12. താഴെപറയുന്ന സമരൂപബഹുഭുജങ്ങൾ ഓരോന്നിലും, ഒരു ബാഹ്യകോണിന്റെ അളവു കാണുക:—(i) പഞ്ചഭുജം, (ii) സപ്തഭുജം, (iii) അഷ്ടഭുജം (iv) നവഭുജം.

13. ഒരു സമരൂപബഹുഭുജത്തിന്റെ ബാഹ്യകോണ് 36° ആയാൽ, ഭുജങ്ങളുടെ എണ്ണം കാണുക.

14. 7, 8, 12 ഭുജങ്ങളുള്ള ബഹുഭുജങ്ങളുടെ ആന്തരകോണുകളുടെ തുക കാണുക.

15. 15 ഭുജമുള്ള ഒരു ബഹുഭുജത്തിന്റെ ആന്തരകോണുകളുടെ ശരാശരി അളവെത്ര?

16. 150° ആന്തരകോണുള്ള ഒരു സമരൂപ ബഹുഭുജത്തിനു എത്ര ഭുജമുണ്ട്?

17. നാലിൽ കൂടുതൽ ഭുജമുള്ള സമരൂപ ബഹുഭുജങ്ങളുടെ ആന്തരകോണുകൾ ബൃഹത് കോണുകളായിരിക്കുമെന്നു തെളിയിക്കുക.

18. നാലിൽ കൂടുതൽ ഭുജമുള്ള സമരൂപ ബഹുഭുജങ്ങളുടെ ബാഹ്യകോണുകൾ ന്യൂനകോണുകളായിരിക്കുമെന്നു തെളിയിക്കുക.

19. ഒരു സമരൂപ ബഹുഭുജത്തിലെ ആന്തരകോണ് താഴെ തന്നിരിക്കുന്ന അളവുകളായിരിക്കാൻ സാധിക്കുമോ? സാധിക്കുമെങ്കിൽ ഭുജങ്ങളുടെ എണ്ണമെന്ത്?—

(i) 125° (ii) 135° (iii) 140° (iv) 144°.

20. ഒരു സമരൂപ ബഹുഭുജത്തിലെ ബാഹ്യകോണ് താഴെ തന്നിരിക്കുന്ന അളവുകളായിരിക്കാൻ സാധിക്കുമോ? സാധിക്കുമെങ്കിൽ ഭുജങ്ങളുടെ എണ്ണം കാണുക:—

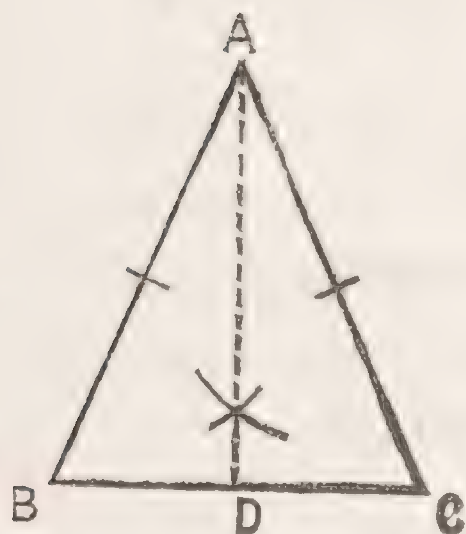
(i) 18° (ii) 20° (iii) 28° (iv) 30° (v) 36°.

N.B. ഒരു ത്രികോണത്തിലെ രണ്ടു വശങ്ങളും തുല്യമായാൽ അതു 'സമപാർശ്വത്രികോണ'മാണ് (**Isosceles Triangle**).

സാധാരണയായി ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ ഏതു വശത്തെയും 'പാദം' (Base) എന്നു പറയാവുന്നതാണ്. എങ്കിലും, ഒരു സമ പാർശ്വ ത്രികോണത്തിൽ തുല്യവശങ്ങൾ ഒഴിച്ചുള്ള മൂന്നാമത്തെ വശത്തെയാണ് പാദം എന്നു പറയാറുള്ളതു്. പാദത്തിന്റെ അഗ്രങ്ങളിലുള്ള കോണുകൾ പാദകോണുകളാണ് (Base angles).

ഉപപാദ്യം 12

ഒരു ത്രികോണത്തിൽ രണ്ടു വശങ്ങൾ സമമായാൽ, അവയ്ക്കെതിരെയുള്ള കോണുകൾ തുല്യമായിരിക്കും.



<u>ദത്തം</u>:—ABC എന്ന ത്രികോണത്തിൽ AB=AC.

<u>അനുമാനം</u>:—$\angle B = \angle C$

<u>ക്രിയ</u>;— $\angle A$ യുടെ സമഭാജി വരയ്ക്കുക. സമഭാജി BC യെ D യിൽ സന്ധിക്കുന്നു.

<u>ഉപപത്തി</u>:—

AB=AC (ദത്തം)

AD പൊതുള്ളതും

ഉൾക്കോൺ $BAD = \angle CAD$

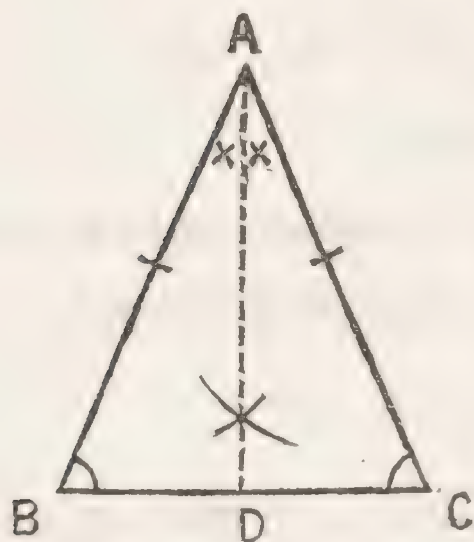
$\therefore \triangle BAD = \angle CAD$.

$\therefore \angle B = \angle C$

ഉപപാദ്യം 13

(ഉപപാദ്യം 12-ൻെറ വിപരീതം)

ഒരു ത്രികോണത്തിലെ രണ്ടു കോണുകൾ തുല്യമായാൽ അവയ്ക്കെതിരെയുള്ള വശങ്ങൾ തുല്യമായിരിക്കും.



ദത്തം:— $\triangle ABC$ യിൽ $\angle B = \angle C$.

അനുമാനം:— $AB = AC$

ക്രിയ:— $\angle A$യുടെ സമഭാജി വരയ്ക്കുക. അതു BC യെ Dയിൽ സന്ധിക്കുന്നു.

ഉപപത്തി.—

$\angle B = \angle C$ (ദത്തം)

$\angle BAD = \angle CAD$ (ക്രിയ)

AD പൊതുഭുജം

$\therefore \triangle BAD \equiv \triangle CAD$

$\therefore AB = AC$

അഭ്യാസം 34

1. ഒരു ത്രികോണത്തിലെ 3 വശങ്ങളും തുല്യമായാൽ അതിൻെറ കോണുകൾ മൂന്നും തുല്യമായിരിക്കുമെന്നു തെളിയിക്കുക.

2. ഒരു ത്രികോണത്തിലെ 3 കോണുകളും തുല്യമായാൽ മൂന്നു വശങ്ങളും തുല്യമാണെന്നു സമർത്ഥിക്കുക.

3. ഒരു സമപാർശ്വത്രികോണത്തിലെ, തുല്യവശങ്ങളെ പാദത്തിനു വെളിയിലായി ദീർഘിപ്പിക്കുമ്പോം ഉണ്ടാകുന്ന ബാഹ്യകോണുകൾ സമമെന്നു തെളിയിക്കുക.

4. ABC എന്ന ത്രികോണത്തിൽ AB=AC. D,E,F യഥാക്രമം BC, CA, AB എന്നീ ഭുജങ്ങളുടെ മദ്ധ്യബിന്ദുക്കളാണു. DE=DF എന്നു തെളിയിക്കുക.

5. ABC എന്ന ത്രികോണത്തിൽ AB=AC. D,E എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ യഥാക്രമം AC, AB എന്ന വശങ്ങളുടെ മദ്ധ്യബിന്ദുക്കളായാൽ BD=CE എന്നു തെളിയിക്കുക.

6. സമപാർശ്വത്രികോണത്തിലെ തുല്യവശങ്ങളിൽ ഒന്നിനെ ശീർഷത്തിനു വെളിയിലായി ദീർഘിപ്പിച്ചാൽ കിട്ടുന്ന ബാഹ്യകോണു് പാദകോണുകളിൽ ഒന്നിന്റെ ഇരട്ടിയാണെന്നു സ്ഥാപിക്കുക.

7. സമപാർശ്വത്രികോണത്തിലെ പാദത്തിന്റെ മദ്ധ്യബിന്ദുവിൽ നിന്നു സമപാർശ്വങ്ങളിലേക്കു വരയ്ക്കുന്ന ലംബങ്ങളുടെ നീളം തുല്യമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

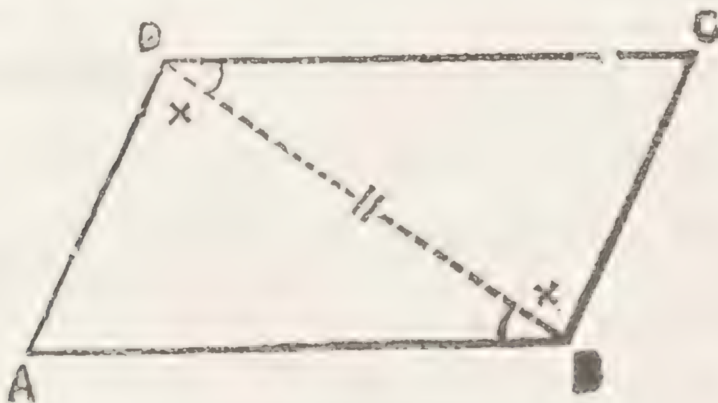
8. ABC എന്നത്രികോണത്തിൽ AB = AC. B, C എന്നീ കോണുകളുടെ സമഭാജികൾ O യിൽ സന്ധിച്ചാൽ OB=OC എന്നു സമർത്ഥിക്കുക.

9. POQ എന്ന കോണിന്റെ സമഭാജിയിലുള്ള ഒരു ബിന്ദുവാണ് A. A യിൽ കൂടി OP ക്കു സമാന്തരമായി വരയ്ക്കുന്ന രേഖ OQ വിനെ B യിൽ സന്ധിച്ചാൽ OB=AB യെന്നു തെളിയിക്കുക.

ഒരു ചതുർഭുജത്തിന്റെ എതിർഭുജങ്ങൾ സമാന്തരങ്ങളായിരുന്നാൽ അതു ഒരു സാമാന്തരീകമാണ് (parallelogram). സാമാന്തരികത്തിന്റെ ഏതാനും ലക്ഷണങ്ങൾ താഴെപ്പറയുന്ന ഉപപാദ്യത്തിൽ നിന്നു മനസ്സിലാക്കാം.

ഉപപാദ്യം 14

ഒരു സാമാന്തരികത്തിന്റെ എതിർഭുജങ്ങൾ സമമായിരിക്കും.



ദത്തം:—ABCD ഒരു സാമാന്തരീകമാണ്.

അനുമാനം:—

AB=CD,

AD=BC.

ക്രിയ:—BD എന്ന കൎണ്ണം വരയ്ക്കുക.

ഉപപത്തി:—

AB∥CD, DB ഛേദകം

∴ ∠ABD=∠CDB

AD∥BC, DB ഛേദകം

∴ ∠ADB=∠CBD

ഇപ്പോൾ ABD,CDB എന്നീ ത്രികോണങ്ങളിൽ

∠ABD=∠CDB

∠ADB=∠CBD

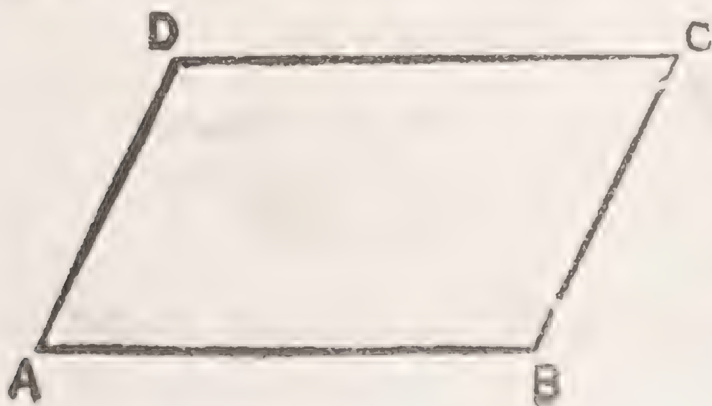
DB പൊതുഭുജം

∴ △ABD≡△CDB

∴ AB=CD, AD=BC

ഉപപാദ്യം 14 (b)

ഒരു സാമാന്തരികത്തിന്റെ എതിർകോണുകൾ സമമായിരിക്കും.



ദത്തം.—ABCD ഒരു സാമാന്തരികം

അനുമാനം:—

∠A = ∠C

∠B = ∠D

ഉപപത്തി:—

AB ∥ CD, AD ഛേദകം

$\therefore \angle A + \angle D = 180^\circ$

AD ∥ BC, AB ഛേദകം

$\therefore \angle A + \angle B = 180^\circ$

$\therefore \angle A + \angle B = \angle A + \angle D$

രണ്ടു പക്ഷത്തുനിന്നും $\angle A$ മാററിക്കളഞ്ഞാൽ

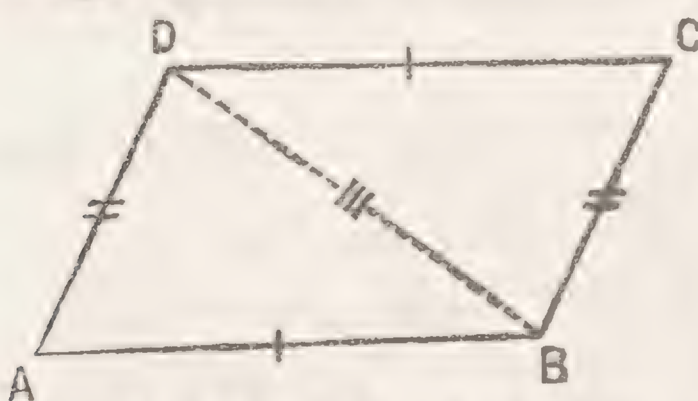
$\angle B = \angle D$.

അതുപോലെ തന്നെ $\angle A = \angle C$ എന്നും തെളിയിക്കാം.

സൂചന:—ഉപപാദ്യം 14(a)യുടെ ചിത്രത്തിൽ കാണുന്ന ABD, CDB എന്നീ ത്രികോണങ്ങൾ സർവ്വസമം എന്നു തെളിയിച്ചിട്ടും ഉപപാദ്യം 14(b) തെളിയിക്കാവുന്നതാണ്.

ഉപപാദ്യം 14 (c)

ഒരു സാമാന്തരികത്തിന്റെ കർണ്ണങ്ങൾ ഓരോന്നും സാമാന്തരികത്തെ സമഭാഗം ചെയ്യും.



ദത്തം:—ABCD ഒരു സാമാന്തരികം.

അനുമാനം:—

AC, BD എന്നീ കർണ്ണങ്ങൾ ഓരോന്നും ABCD യെ രണ്ടു സമഭാഗമാക്കുന്നു.

ക്രിയ:— BD വരയ്ക്കുക.

ഉപപത്തി:— ABD, CDB എന്നീ ത്രികോണങ്ങളിൽ

AB = CD (സാമാന്തരികത്തിന്റെ എതിർ ഭുജങ്ങൾ)

AD = BC ,, ,,

BD പൊതുഭുജം.

∴ $\triangle ABD \equiv \triangle CDB$

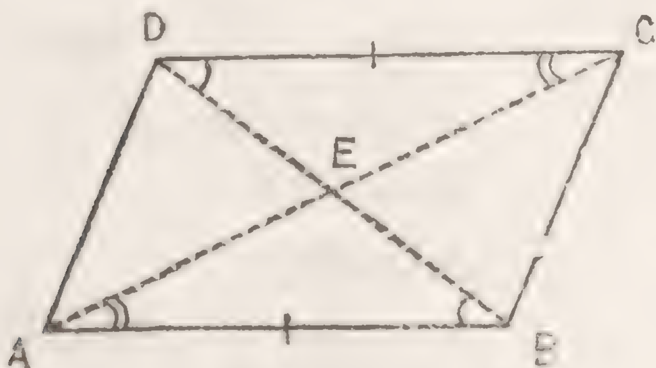
∴ ഈ ത്രികോണങ്ങളുടെ വിസ്തീർണ്ണങ്ങൾ തുല്യം

∴ BD എന്ന കർണ്ണം ABCD യെ രണ്ടു സമഭാഗമാക്കുന്നു.

അതുപോലെതന്നെ AC എന്ന കർണ്ണം ABCD യെ രണ്ടു സമഭാഗമാക്കുന്നു എന്നും തെളിയിക്കാം.

ഉപപാദ്യം 14 (d)

ഒരു സാമാന്തരികത്തിന്റെ കർണ്ണങ്ങൾ പരസ്പരം സമഭാജികളാണ്.



ദത്തം;— ABCD ഒരു സാമാന്തരികം.

അനുമാനം:— AC, BD എന്നീ കർണ്ണങ്ങൾ പരസ്പരം സമഭാഗമാകുന്നു.

ക്രിയ:— AC, BD എന്നീ കർണ്ണങ്ങൾ വരയ്ക്കുക. ഇവ പരസ്പരം E യിൽ സന്ധിക്കട്ടെ.

ഉപപത്തി:—

AEB, CED എന്നീ ത്രികോണങ്ങളിൽ

AB=CD (സാമാന്തരീകത്തിന്റെ എതിർ ഭുജങ്ങൾ)

$\angle ABE = \angle CDE$ (ഏകാന്തര കോണുകൾ, $AB \parallel CD$)

$\angle BAE = \angle DCE$

$\therefore \triangle AEB \equiv \triangle CED$

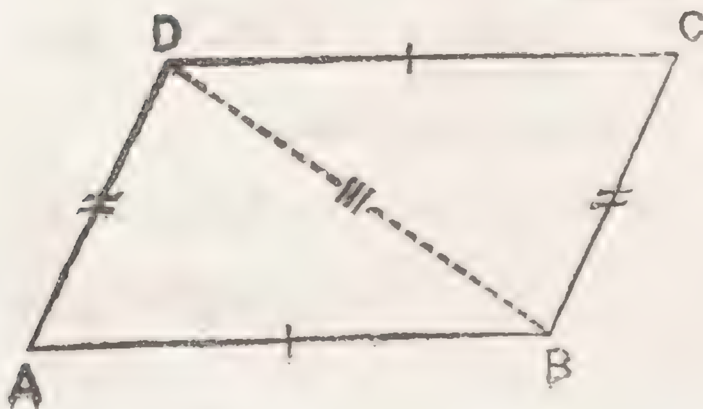
$\therefore AE = EC,$

$BE = ED$

∴ AC, BD എന്നീ കർണ്ണങ്ങൾ പരസ്പരം സമഭാഗമാക്കുന്നു.

ഉപപാദ്യം 15 (a)

ഒരു ചതുർഭുജത്തിലെ രണ്ടു ജോട് എതിർ ഭുജങ്ങളും തുല്യമായാൽ, അതു ഒരു സാമാന്തരീകമായിരിക്കും.



ദത്തം: ABCD എന്ന ചതുർഭുജത്തിൽ

AB=CD

AD=BC

അനുമാനം: ABCD ഒരു സാമാന്തരീകം

ക്രിയ:—BD വരയ്ക്കുക.

ഉപപത്തി:—ABD, CDB എന്നീ ത്രികോണങ്ങളിൽ,

AB=CD (ദത്തം)

AD=BC

BD പൊതുവശം

$\therefore \triangle ABD \equiv \triangle CDB$

$\therefore \angle ABD = \angle CDB$

എന്നാൽ ഇവ, AB, CD എന്നീ രേഖകളെ BD ഛേദിക്കുന്നതു കൊണ്ടുണ്ടാകുന്ന ഏകാന്തരകോണുകളാണ്.

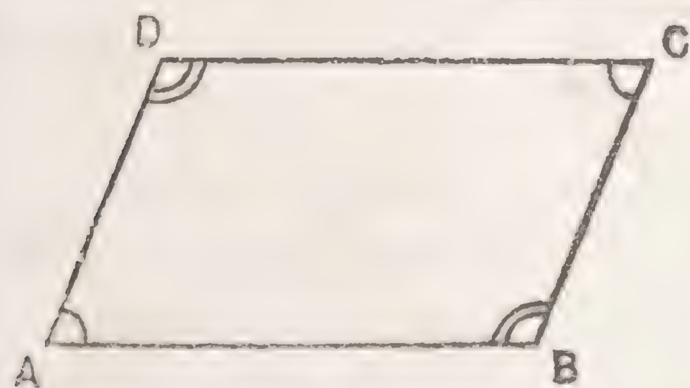
$\therefore AB \parallel CD$

അതുപോലെതന്നെ $AD \parallel BC$.

$\therefore$ AB CD ഒരു സാമാന്തരികം.

ഉപപാദ്യം 15 (b)

ഒരു ചതുർഭുജത്തിലെ രണ്ടു ജോടി എതിർകോണുകളും തുല്യമായാൽ അതു ഒരു സാമാന്തരികമായിരിക്കും.



ദത്തം:—ABCD എന്ന ചതുർഭുജത്തിൽ.

$\angle A = \angle C$,

$\angle B = \angle D$

അനുമാനം:— ABCD ഒരു സാമാന്തരികം.

ഉപപത്തി:— $\angle A = \angle C$ (ദത്തം)

$\angle B = \angle D$,,

$\therefore \angle A + \angle B = \angle C + \angle D$

എന്നാൽ $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ$ (ഒരു ചതുർഭുജത്തിലെ കോണുകൾ)

$\therefore \angle A + \angle B = 180^\circ$

എന്നാൽ ഇവ, AD, BC എന്നീ രേഖകളെ AB ഛേദിക്കുന്നതുകൊണ്ടുണ്ടാകുന്ന പാർശ്വാന്തര കോണുകളാണ്.

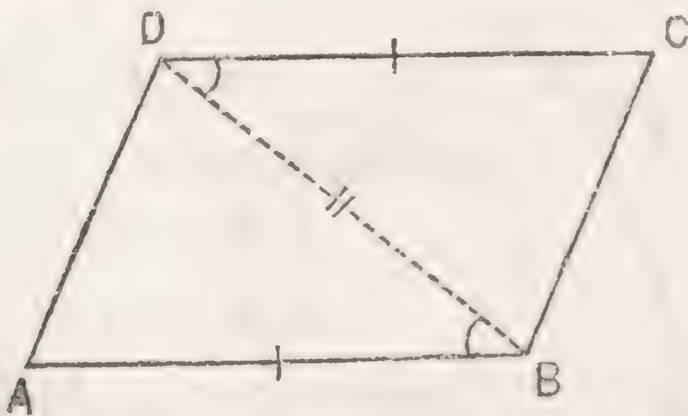
$\therefore AD \parallel BC$

അതു പോലെതന്നെ $AB \parallel CD$

$\therefore$ ABCD ഒരു സാമാന്തരികം.

ഉപപാദ്യം 15 (ഠ)

ഒരു ചതുർഭുജത്തിലെ ഒരു ജോടി എതിർഭുജങ്ങൾ സമവും സമാന്തരവുമായാൽ അതു ഒരു സാമാന്തരികമായിരിക്കും.



ദത്തം:— ABCD എന്ന ചതുർ ഭുജത്തിൽ AB=CD; $AB \parallel CD$.

അനുമാനം:— ABCD ഒരു സാമാന്തരികം.

ക്രിയ:— BD വരയ്ക്കുക.

ഉപപത്തി:—ABD, CDB എന്നീ ത്രികോണങ്ങളിൽ $\overline{AB=CD}$ (ദത്തം)

BD പൊതുവശം.

ഉം $\angle ABD$ = ഉം $\angle CDB$ ($AB \parallel CD$; ഏകാന്തരകോണുകളാം.)

$\therefore \triangle ABD \equiv \triangle CDB$

$\therefore \angle ADB = \angle CBD$

എന്നാൽ ഇവ AD, BC എന്നീ രേഖകളെ BD ഛേദിക്കുന്നു കൊണ്ടുണ്ടാകുന്ന ഏകാന്തരകോണുകളാണ്.

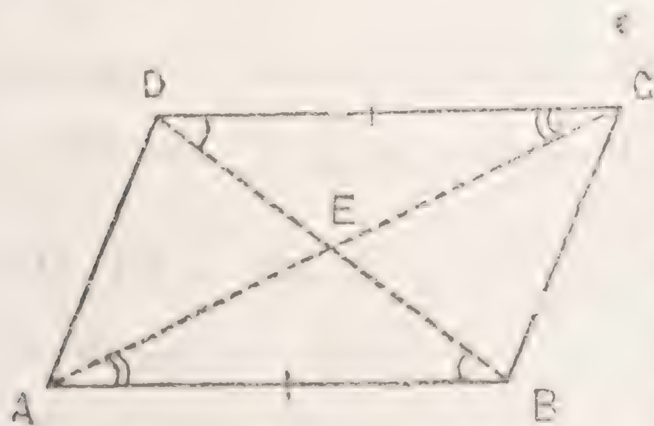
$\therefore AD \parallel BC$

എന്നാൽ $AB \parallel CD$ (ദത്തം.)

$\therefore$ ABCD ഒരു സാമാന്തരികം.

ഉപവാക്യം 15 (d)

ഒരു ചതുർഭുജത്തിലെ രണ്ടു കർണ്ണങ്ങളും പരസ്പരം സമഭാജികളായിരുന്നാൽ, അതു ഒരു സാമാന്തരികമായിരിക്കും.



ദത്തം:—ABCD എന്ന ചതുർഭുജത്തിൽ കർണ്ണങ്ങൾ E യിൽ സന്ധിക്കുന്നു. $AE = EC$; $BE = ED$.

അനുമാനം:—ABCD ഒരു സാമാന്തരികം

<u>ഉപപത്തി</u>:—AEB, CED എന്നീ ത്രികോണങ്ങ
ളിൽ

$AE = EC$ (ദത്തം)

$BE = ED$,,

ഉം $\angle AEB$ = ഉം $\angle CED$ (എതിർ കോണുകഠം)

$\therefore \triangle AEB \equiv \triangle CED$ (എതിർകോണുകഠം)

$\therefore \angle ABE = \angle CDE$

എന്നാൽ ഇവ AB, CD എന്നീ രേഖകളെ BD ഛേദിക്കുന്നതുകൊണ്ടുണ്ടാകുന്ന എകാന്തരകോണുകഠം.

$\therefore AB \parallel CD$

അതുപോലെ തന്നെ $AD \parallel BC$ എന്നും തെളിയിക്കാം.

$\therefore$ ABCD ഒരു സാമാന്തരികം.

അഭ്യാസം 15

---

1. ABCD ഒരു സാമാന്തരികം, $\angle A = 75°$ ആയാൽ ബാക്കി കോണുകളുടെ അളവു കാണുക.

2. ABCD എന്ന സാമാന്തരികത്തിൽ $\angle ACD = 30°$, $\angle B = 110°$. എന്നാൽ ചിത്രത്തിൽ കാണുന്ന ബാക്കി കോണുകളുടെ അളവു കാണുക.

3. ഒരു സാമാന്തരികത്തിൽ, അടുത്തുള്ള രണ്ടു ഭുജങ്ങൾ തുല്യമായാൽ അതിന്റെ ഭുജങ്ങൾ എല്ലാം തുല്യമെന്നു തെളിയിക്കുക.

4. ഒരു സാമാന്തരികത്തിൽ, അടുത്തുള്ള രണ്ടു കോണുകൾ തുല്യമായാൽ അതിന്റെ എല്ലാ കോണുകളും തുല്യമെന്നു തെളിയിക്കുക

5. ഒരു സാമാന്തരികത്തിന്റെ രണ്ടു കർണ്ണങ്ങളും തുല്യമായാൽ അതു ഒരു ചതുരം (Rect angle) മെന്നു തെളിയിക്കുക.

6. ABCD ഒരു ദീർഘചതുരമാണ്. AC=BD എന്നു സമർത്ഥിക്കുക.

7. ABCD ഒരു സാമാന്തരികം. B, D എന്ന ബിന്ദുക്കളിൽ നിന്നു BE, DF എന്നവ AC ക്കു ലംബമായി വരച്ചാൽ BE=DF എന്നു തെളിയിക്കുക.

8. PQRS ഒരു സാമാന്തരികം. A, B എന്നിവ യഥാക്രമം PS, QR എന്നിവയുടെ മദ്ധ്യബിന്ദുക്കളാണു. AB, PQ, RS എന്നിവ പരസ്പരം സാമാന്തരങ്ങളാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

9. ABC ഒരു ത്രികോണം. A, B, C എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ കൂടി യഥാക്രമം PQ, PR, QR എന്നീ രേഖകൾ എതിർ വശങ്ങൾക്കു സാമാന്തരങ്ങളായി വരച്ചാൽ PQR എന്ന ത്രികോണം ABC യുടെ നാലിരട്ടിയാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

10 PQRS എന്ന സാമാന്തരികത്തിന്റെ കർണ്ണങ്ങൾ പരസ്പരം O യിൽ സന്ധിക്കുന്നു. AOB എന്ന ഏതെങ്കിലും ഒരു ഋജുരേഖ PQ, RS എന്നീ വശങ്ങളെ യഥാക്രമം A, B എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ ഖണ്ഡിച്ചാൽ (i) AO=OB എന്നും (ii) AB സാമാന്തരികത്തെ രണ്ടു സമഭാഗമാക്കുന്നു എന്നും തെളിയിക്കുക.

11. ABCD ഒരു സമചതുർഭുജം (Rhombus) AC, BD എന്നീ കർണ്ണങ്ങൾ പരസ്പരം മദ്ധ്യലംബങ്ങളെന്നു നിരൂപിക്കുക.

12. ABCD ഒരു സാമാന്തരികം. AP=CQ എന്നു കിട്ടത്തക്കവണ്ണം AD യിൽ P എന്ന ബിന്ദുവും, BC യിൽ Q എന്ന ബിന്ദുവും എടുത്താൽ APCQ ഒരു സാമാന്തരികമെന്നു തെളിയിക്കുക.

13. ABCD എന്ന ചതുർഭുജത്തിൽ $AB \parallel CD$ $AD = BC$ ആയാൽ $\angle A = \angle B$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

14. ABC എന്ന ത്രികോണത്തിൽ BC യുടെ മദ്ധ്യബിന്ദുവാണ് D. AD യെ ദീർഘിപ്പിച്ചു AD ക്കു തുല്യമായി DE എടുത്താൽ ABEC ഒരു സാമാന്തരീകമെന്നു തെളിയിക്കുക

15. ഒരു സാമാന്തരീകത്തിന്റെ കോണുകളുടെ സമഭാജികൾ നാലെണ്ണവും പരസ്പരം ഛേദി

കളെ യോജിപ്പിച്ചാൽ ഉണ്ടാകുന്ന ചതുർഭുജം ഒരു ചതുരമായിരിക്കും.

16. ഒരു സാമാന്തരികത്തിന്റെ അടുത്തുള്ള രണ്ടു വശങ്ങളും അവ ഉൾക്കൊള്ളുന്ന കോണും യഥാക്രമം 3", 1·2", 60°. സാമാന്തരികം നിർമ്മിക്കുക.

17. രണ്ടു വശങ്ങൾ 7cm, 3cm; ഇടയ്ക്കുള്ള കോൺ 110°, സാമാന്തരികം വരയ്ക്കുക.

18. രണ്ടു വശങ്ങളും ഒരു കർണ്ണവും യഥാക്രമം 1·4", 3·2", 2·5". സാമാന്തരികം നിർമ്മിച്ചു മറ്റെ കർണ്ണം അളക്കുക.

19. രണ്ടു കർണ്ണങ്ങളും അവ ഉൾക്കൊള്ളുന്ന ഒരു കോണും യഥാക്രമം 4", 2·6", 50°. സാമാന്തരികം നിർമ്മിക്കുക.

20. കർണ്ണങ്ങൾ 6c.m., 10·2cm. അവയ്ക്കിടയ്ക്കുള്ള ഒരു കോൺ 70°. സാമാന്തരികം വരയ്ക്കുക.

21. ഒരു സമചതുരത്തിലെ കർണ്ണം 2". സമചതുരം വരച്ചു അതിന്റെ ഭുജം അളക്കുക.

22. ഒരു സമചതുർഭുജത്തിന്റെ കർണ്ണങ്ങൾ 3" 1·6". സമചതുർഭുജം നിർമ്മിച്ചു. അതിന്റെ ഭുജം അളക്കുക.

23. ഒരു സമചതുർഭുജത്തിന്റെ ഒരു കർണ്ണം 1·4" ഭുജം 1·8" സമചതുർഭുജം വരച്ചു മറ്റെ കർണ്ണം അളക്കുക.

24. ഒരു ദീർഘചതുരത്തിലെ ഒരുവശം 2·8", കർണ്ണം 3·1" ചതുരം വരച്ച് മറെറവശം അളക്കുക.

25. ഒരു ദീർഘചതുരത്തിൻെറ കർണ്ണം 8 cm കർണ്ണങ്ങൾക്കിടയ്ക്കുള്ള ഒരു കോൺ 50°. ചതുരം നിർമ്മിച്ചു അതിൻെറ വശങ്ങൾ അളക്കുക.

26. ABCD എന്ന ലംബക (**Trapezium**) ത്തിൽ AB∥CD, AB=8·5 cm., BC=3 5 cm., CD=6cm. A=D 3cm. ലംബകം നിർമ്മിക്കുക.

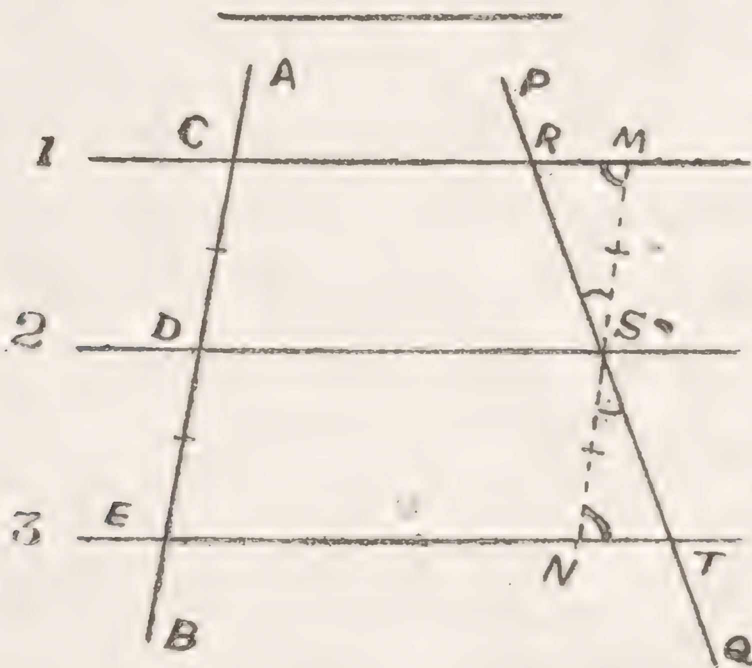
27. AB=?", BC=2·8", CD=2·5", DA = 2·8", AB∥CD. ABCD എന്ന ലംബകം നിർമ്മിക്കുക.

28. രണ്ടു തീവണ്ടിപ്പാതകളുടെ വീതി യഥാക്രമം 5 അടി, 3 അ. 4 ഇ. ഇവ 45° കോണിൽ പരസ്പരം ഛേദിച്ചാൽ ഉണ്ടാകുന്ന സാമാന്തരികത്തിൻെറ പ്ലാൻ വരയ്ക്കുക.

29. BD = 2·8", AB = 2·8" അളവുകളുള്ള ABCD എന്ന ദീർഘചതുരം വരച്ചു അതിൻെറ മറെറവശം അളക്കുക.

ഉപപാദ്യം 16

മൂന്നോ അതിലധികമോ സമാന്തര രേഖകളെ ഒരു രേഖ ഛേദിക്കുമ്പോഴുണ്ടാകുന്ന അന്തര ഖണ്ഡങ്ങൾ തുല്യമായാൽ, വേറെ ഏതെങ്കിലും ഛേദകം അവയെ ഛേദിക്കുമ്പോഴുണ്ടാകുന്ന അന്തരഖണ്ഡങ്ങളും തുല്യമായിരിക്കും,



<u>ദത്തം</u>:—1, 2, 3 എന്നീ സമാന്തരങ്ങളെ AB എന്ന ഛേദകം C, D, E എന്ന ബിന്ദുക്കളിൽ ഛേദിക്കുന്നു. CD, DE എന്നീ അന്തര ഖണ്ഡങ്ങൾ തുല്യമായിരിക്കുന്നു.

PQ എന്ന മറ്റൊരു ഛേദകം സമാന്തരങ്ങളെ R, S, T എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ ഛേദിക്കുന്നു.

<u>അനുമാനം</u>:—RS = ST.

<u>ക്രിയ</u>:—S എന്ന ബിന്ദുവിൽകൂടി AB ക്കു ഒരു സമാന്തരം വരയ്ക്കുക. ഇതു 1, 3 എന്നീ രേഖകളെ യഥാക്രമം M, N എന്ന ബിന്ദുക്കളിൽ ഛേദിക്കുന്നു.

ഉപപത്തി:—$CM \parallel DS$ (ദത്തം)

$CD \parallel MS$ (ക്രിയ)

$\therefore$ CDSM ഒരു സാമാന്തരികം

$\therefore CD = SM$

അതുപോലെ DENS ഒരു സാമാന്തരികം

$\therefore DE = SN$

എന്നാൽ $CD = DE$

$\therefore SM = SN$.

ഇപ്പോൾ SMR, SNT എന്നീ ത്രികോണങ്ങളിൽ

$SM = SN$

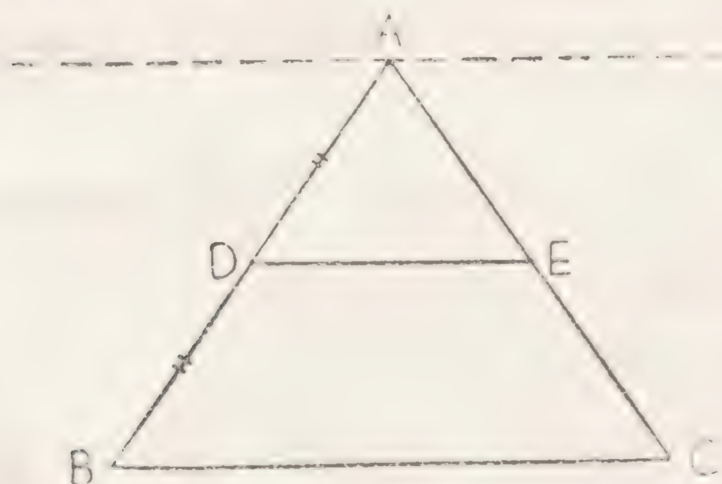
$\angle SMR = \angle SNT$ ($1 \parallel 3$; MN ഛേദകം)

$\angle MSR = \angle NST$ (എതിർകോണുകൾ)

$\therefore \triangle SMR \equiv \triangle SNT$;

$\therefore RS = ST$

അനുസിദ്ധാന്തം (1) ഒരു ത്രികോണത്തിലെ ഒരു വശത്തിന്റെ മദ്ധ്യബിന്ദുവിൽകൂടി വേറൊരു വശത്തിന്നു സമാന്തരം വരച്ചാൽ അതു മൂന്നാം വശത്തെ രണ്ടു സമഭാഗമാക്കും.



X ദത്തം. ABC എന്ന ത്രികോണത്തിൽ ABയുടെ മദ്ധ്യബിന്ദുവാണു് D. D യിൽകൂടി BCക്കു സമാന്തരമായി വരച്ചിരിക്കുന്ന രേഖ AC യെ E എന്ന ബിന്ദുവിൽ സന്ധിക്കുന്നു.

അനുമാനം: AC യുടെ മദ്ധ്യബിന്ദുവാണു് D എന്നു തെളിയിക്കുന്നു.

ക്രിയ A യിൽകൂടി BC ക്കു സമാന്തരമായി AX എന്ന രേഖ വരയ്ക്കുക.

ഉപപത്തി. ഇപ്പോൾ BC, DE, AX എന്നിവ സമാന്തരങ്ങളാണു്.

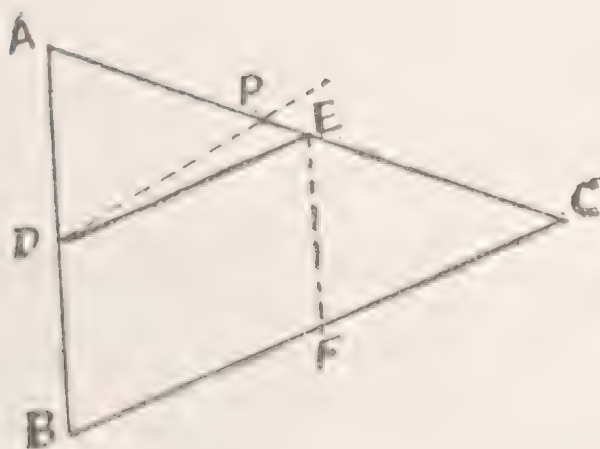
AB എന്ന ഛേദകരേഖയിലുള്ള അന്തരഖണ്ഡങ്ങൾ AD, DB എന്നിവ തുല്യം (ദത്തം)

∴ AC എന്ന ഛേദകരേഖയിലുള്ള അന്തരഖണ്ഡങ്ങളും തുല്യമായിരിക്കും

അതായതു AE=EC

∴ AC യുടെ മദ്ധ്യബിന്ദുവാണു് E.

അനുസിദ്ധാന്തം (ii) ഒരു ത്രികോണത്തിലെ രണ്ടു വശങ്ങളുടെ മദ്ധ്യബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന രേഖ മൂന്നാം വശത്തിനു സമാന്തരവും അതിന്റെ പകുതിയുമായിരിക്കും.



ദത്തം ABC എന്ന ത്രികോണത്തിൽ D, E എന്നിവ AB, AC എന്ന വശങ്ങളുടെ മദ്ധ്യബിന്ദുക്കളാണു്.

അനുമാനം: (i) $DE \parallel BC$.

(ii) $DE = \frac{1}{2}BC$.

ക്രിയ. DE, BC ക്കു സമാന്തരമല്ലെങ്കിൽ D യിൽ കൂടി BC ക്കൊരു സമാന്തരം വരയ്ക്കുക. ഇതു AC യെ യിൽ സന്ധിക്കട്ടെ

ഉപപത്തി. AB യുടെ മദ്ധ്യബിന്ദുവിൽകൂടി BC ക്കു സമാന്തരമായി DP വരച്ചിരിക്കുന്നതു കൊണ്ട് P, AC യുടെ മദ്ധ്യബിന്ദുവായിരിക്കണം. (ക്രിയ)
എന്നാൽ E, AC യുടെ മദ്ധ്യബിന്ദുവാണ് (ദത്തം)

$\therefore$ P, E എന്നീ രണ്ടു ബിന്ദുക്കളും AC യുടെ മദ്ധ്യ ബിന്ദുക്കളാണെന്നു ലഭിക്കുന്നു.
ഇതു സാദ്ധ്യമല്ല. അതുകൊണ്ട് P എന്ന ബിന്ദു E യിൽ പതിക്കണം.

$\therefore$ DE ∥ BC............................ (i)

BC യുടെ മദ്ധ്യബിന്ദു F എന്നു വിചാരിക്കുക.
അപ്പോൾ EF ∥ DB
എന്നാൽ DE ∥ BC (തെളിയിച്ചു)
$\therefore$ BDEF ഒരു സാമാന്തരികം
$\therefore$ DE = BF = $\frac{1}{2}$ BC.................. (ii)

അഭ്യാസം 36

---

1. ABC എന്ന ത്രികോണത്തിൽ AB, AC എന്നീ വശങ്ങളുടെ മദ്ധ്യബിന്ദുക്കളാണ് P, Q എന്നിവ. BC യിലുള്ള ഏതെങ്കിലും ഒരു ബിന്ദു

വാണു് D. PQ എന്ന രേഖ AD രേഖയെ രണ്ടു സമഭാഗമാക്കുമെന്നു തെളിയിക്കുക.

2. ABC എന്ന ത്രികോണത്തിൽ BC, CA, AB എന്നീ വശങ്ങളുടെ മദ്ധ്യബിന്ദുക്കൾ യഥാക്രമം P, Q, R എന്നിവയാണു്. ARPQ, BPQR, CQRP എന്നിവ സാമാന്തരികങ്ങളെന്നു തെളിയിക്കുക.

3. ABCD ഒരു ചതുർഭുജം. PQRS എന്നിവ യഥാക്രമം AB, BC, CD, DA എന്നീ വശങ്ങളുടെ മദ്ധ്യബിന്ദുക്കളാണു്. PQRS ഒരു സാമാന്തരികമെന്നു തെളിയിക്കുക.

4. ഒരു ചതുർഭുജത്തിന്റെ എതിർവശങ്ങളുടെ മദ്ധ്യബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന ഋജുരേഖകൾ പരസ്പരം സമഭാജികളാണു്.

5. ഒരു ചതുർഭുജത്തിലെ ഒരു ജോടി എതിർവശങ്ങളുടെയും കർണ്ണങ്ങളുടെയും മദ്ധ്യബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുമ്പോൾ കിട്ടുന്ന ചതുർഭുജം സാമാന്തരികമാണെന്നും തെളിയിക്കുക.

6. ഒരു ചതുർഭുജത്തിലെ കർണ്ണങ്ങൾ പരസ്പരം ലംബമായിരുന്നാൽ (i) ഭുജങ്ങളുടെ മദ്ധ്യബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുമ്പോൾ കിട്ടുന്ന ചതുർഭുജം ഒരു ചതുരമായിരിക്കും. (ii) എതിർവശങ്ങളുടെ മദ്ധ്യബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന രേഖകൾ തുല്യമായിരിക്കും.

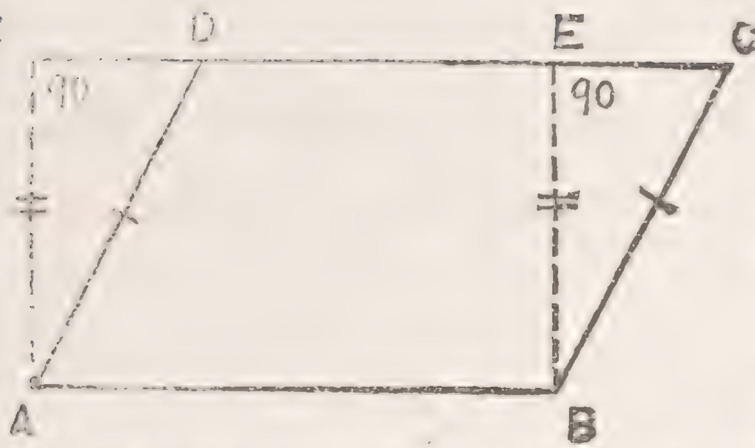
7. ABCD എന്ന സാമാന്തരികത്തിൽ AB, CD എന്നീ വശങ്ങളുടെ മദ്ധ്യബിന്ദുക്കൾ യഥാക്രമം P, Q ആയാൽ PD, BQ എന്നീ രേഖകൾ AC യെ മൂന്നു സമഭാഗമാക്കുമെന്നു സമൎത്ഥിക്കുക.

8. ABCD എന്ന ചതുൎഭുജത്തിൽ AB ∥ CD. AD യുടെ മദ്ധ്യബിന്ദുവിൽകൂടി, സമാന്തരവശങ്ങൾക്കു സമാന്തരമായി വരയ്ക്കുന്ന രേഖ BC യുടെ മദ്ധ്യബിന്ദുവിൽകൂടി കടക്കുമെന്നു നിരൂപിക്കുക.

ABCD എന്ന ചതുൎഭുജത്തിൽ AB∥CD. AC, BD എന്നിവയുടെ മദ്ധ്യബിന്ദുക്കൾ യഥാക്രമം P, Q ആയാൽ PQ∥AB എന്നു തെളിയിക്കുക.

ഉപപാദ്യം 17

ഒരു സാമാന്തരികത്തിൻെറ ക്ഷേത്രഫലം അതേ പാദത്തിന്മേൽ, അതേ സമാന്തരങ്ങളുടെ നടുവിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്ന ദീൎഘചതുരത്തിൻെറ ക്ഷേത്രഫലത്തിനു തുല്യമാണു്.



<u>ദത്തം</u>:—ABCD ഒരു സാമാന്തരികം. AB എന്ന പാദത്തിന്മേൽ AB,CD എന്നീ സമാന്തരങ്ങളുടെ ഇടയ്ക്കു സ്ഥിതി ചെയ്യുന്ന ദീർഘചതുരമാണു് ABEF.

<u>അനുമാനം</u>:—ABCD യുടെ ക്ഷേത്രഫലം = ABEF ന്റെ ക്ഷേത്രഫലം.

<u>ഉപപത്തി</u>:—AF=BE (ദീർഘചതുരത്തിന്റെ എതിർവശങ്ങൾ)

∠, ∠EF ഇവ ഓരോന്നും 90° (ദീർഘചതുരത്തിലെ കോണുകൾ)

AD=BC (∵ ABCD ഒരു സാമാന്തരികം)

ഇപ്പോൾ AFD, BEC എന്നീ മട്ടത്രികോണങ്ങളിൽ,

കർണ്ണം AD=BC

വശം AF=BE

∴ △AFD ≡ △BEC

∴ ABCD യുടെ ക്ഷേ. ഫ. = ABEF-ന്റെ ക്ഷേ. ഫ.

അനുസിദ്ധാന്തം (i)

ഒരു സാമാന്തരികത്തിന്റെ ക്ഷേത്രഫലം, അതിന്റെ പാദം, ഉയരം എന്നി അളവുകളുടെ ഗുണനഫലമാണു്.

(ഉപപാദ്യം 17 ന്റെ ചിത്രം നോക്കുക)

ABCD എന്ന സാമാന്തരികത്തിന്റെ ക്ഷേത്രഫലം ABEF എന്ന ദീർഘചതുരത്തിന്റെ ക്ഷേത്രഫലത്തിനു തുല്യമെന്നു സമാപിച്ചു

എന്നാൽ ABEF എന്ന ദീർഘചതുരത്തിന്റെ ക്ഷേത്രഫലം അതിന്റെ നീളം, വീതി എന്നിവയുടെ ഗുണനഫലമാണു്.

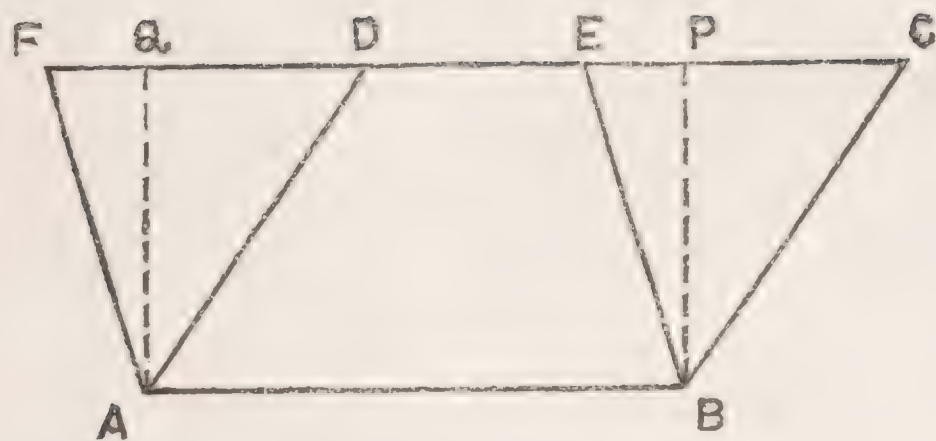
അതായതു ABEF = AB × BE

∴ ABCD = AB × BE.

ഇവിടെ AB എന്നതു ABCD എന്ന സാമാന്തരികത്തിന്റെ പാദവും, BE എന്നതു് അതിന്റെ ഉയരവുമാണല്ലോ.

അനുസിദ്ധാന്തം (ii)

ഒരേ പാദത്തിന്മേൽ (അല്ലെങ്കിൽ തുല്യപാദങ്ങളിന്മേൽ) സ്ഥിതിചെയ്യുന്ന തുല്യഉയരമുള്ള സാമാന്തരികങ്ങളുടെ ക്ഷേത്രഫലങ്ങൾ തുല്യമായിരിക്കും.



ദത്തം.—AB എന്ന പാദത്തിന്മേൽ തുല്യഉയരമുള്ള ABCD, ABEF എന്നീ സാമാന്തരികങ്ങൾ സ്ഥിതിചെയ്യുന്നു. അതായതു് AQ, BP എന്നീ ലംബങ്ങൾ തുല്യം.

അനുമാനം:—ABCD = ABEF

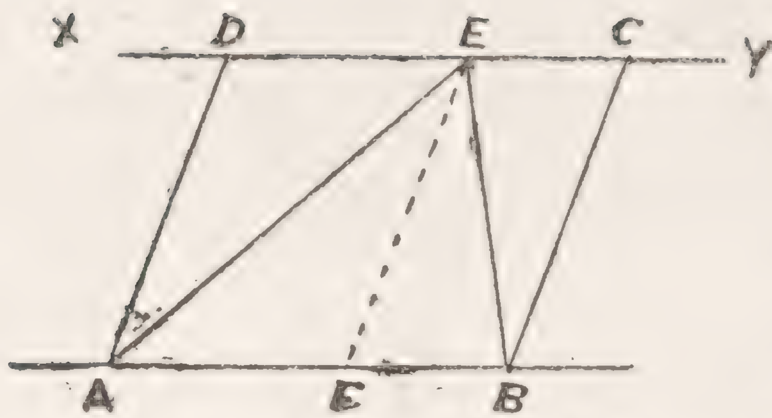
ഉപപത്തി.—ABCD = ABPQ

ABEF = ABPQ

ABCD = ABEF

ഉപപാദ്യം 18

ഒരു സാമാന്തരികവും ഒരു ത്രികോണവും ഒരേ പാദത്തിന്മേൽ ഒരേ ജോടി സമാന്തരരേഖകൾക്കകത്തായി സ്ഥിതിചെയ്താൽ, സാമാന്തരികത്തിന്റെ ക്ഷേത്രഫലം, ത്രികോണത്തിന്റെ ഇരട്ടിയായിരിക്കും.



ദത്തം:—ABCD എന്ന സാമാന്തരികവും, ABE എന്ന ത്രികോണവും AB എന്ന പാദത്തിന്മേൽ, AB, XY എന്നീ സമാന്തരരേഖകൾക്കകത്തായി സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നു.

അനുമാനം—ABCD യുടെ ക്ഷേത്രഫലം △ ABE യുടെ ക്ഷേത്രഫലത്തിന്റെ ഇരട്ടിയായിരിക്കും.

ക്രിയ: E യിൽകൂടി AD ക്കു സമാന്തരമായി EF വരയ്ക്കുക. അതു AB യെ F-ൽ ഖണ്ഡിക്കട്ടെ.

ഉപപത്തി.

AD ∥ BC (സാമാന്തരികത്തിന്റെ എതിർവശങ്ങൾ)

AD ∥ EF (ക്രിയ)

∴ BC ∥ EF

AB ∥ XY (ദത്തം)

∴ ADEF, BCEF എന്നിവ സാമാന്തരികങ്ങളാണു്.

∴ ADEF = 2 △ AEF

BCEF = 2 △ BEF

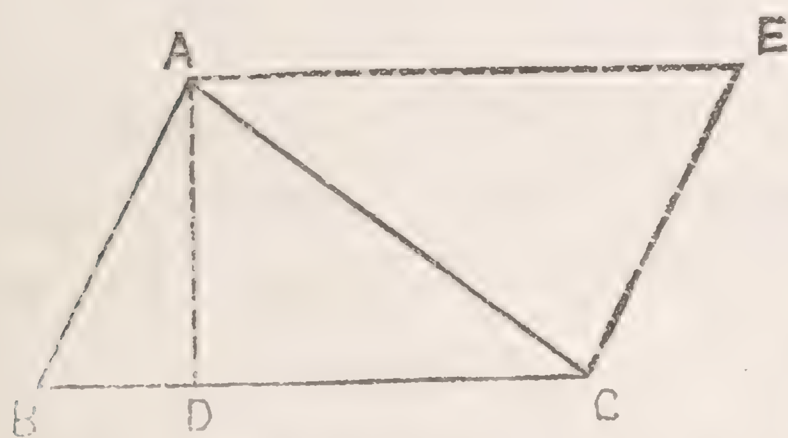
∴ ADEF + BCEF = 2 △ AEF + 2 △ BEF

∴ ABCD = 2 (△ AEF + △ BEF)

= 2 △ ABE

അനുസിദ്ധാന്തം (i)

ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ ക്ഷേത്രഫലം അതിന്റെ പാദം, ഉയരം എന്നീ അളവുകളുടെ ഗുണനഫലത്തിന്റെ പകുതിയാണു്.



ദത്തം — ABC ഒരു ത്രികോണം. AD അതിന്റെ ഉയരം.

അനുമാനം —

$\triangle ABC = \frac{1}{2} BC \times AD$

ക്രിയ. A യിൽ കൂടി BC ക്കു സമാന്തരമായി AE യും C യിൽകൂടി AB ക്കു സമാന്തരമായി CE യും വരച്ചു ABCE എന്ന സാമാന്തരികം പൂർത്തിയാക്കുക

ഉപപത്തി. ABCE എന്ന സാമാന്തരികത്തിന്റെ ക്ഷേത്രഫലം $= BC \times AD$

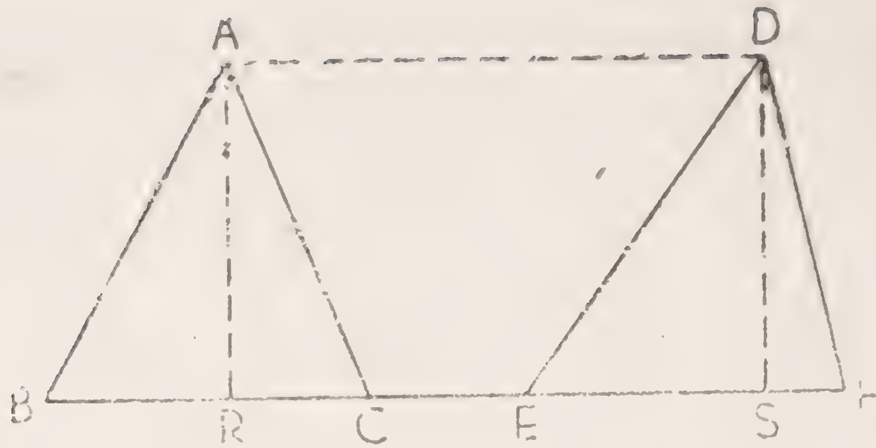
എന്നാൽ ABCE യുടെ ഒരു കർണ്ണമാണു് AC.

$\therefore \triangle ABC = \frac{1}{2} ABCE$

$= \frac{1}{2} BC \times AD$

അനുസിദ്ധാന്തം (ii)

ഒരേ പാദത്തിന്മേൽ (അല്ലെങ്കിൽ തുല്യപാദങ്ങളിന്മേൽ) സ്ഥിതിചെയ്യുന്ന, തുല്യഉയരമുള്ള ത്രികോണങ്ങളുടെ ക്ഷേത്രഫലങ്ങൾ തുല്യമായിരിക്കും.



ദത്തം.—ABC, DEF എന്നീ ത്രികോണങ്ങൾ BC EF എന്നീ തുല്യപാദങ്ങളിന്മേൽ സ്ഥിതിചെയ്യുന്നു അവയുടെ ഉയരങ്ങൾ, AR, DS എന്നിവയും തുല്യങ്ങളാണു്.

അനുമാനം:—ABC, DFF എന്നിവയുടെ ക്ഷേത്രഫലങ്ങൾ തുല്യമായിരിക്കും.

ഉപപത്തി;—

$\triangle$ ABC യുടെ ക്ഷേത്രഫലം $= \frac{1}{2} BC \times AR$

$\triangle$ DEF ൻെറ .... $\frac{1}{2} EF \times DS$

എന്നാൽ $BC = EF$, $AR = DS$ (ദത്തം)

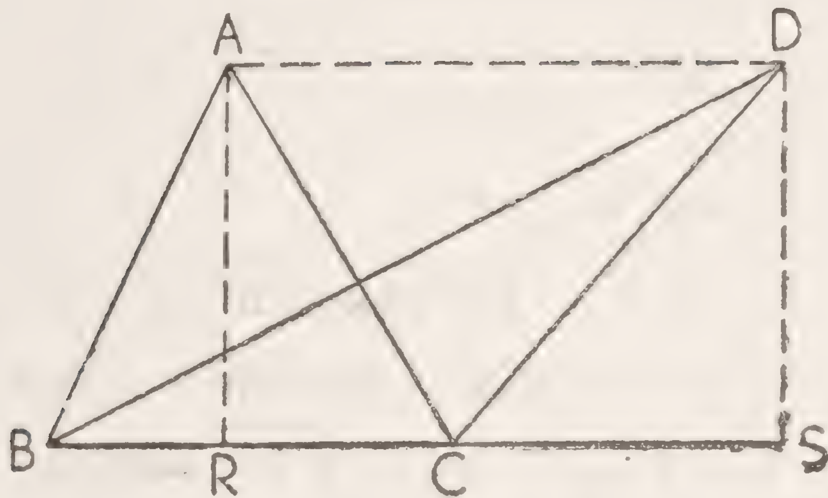
$\therefore \frac{1}{2} BC \times AR = \frac{1}{2} EF \times DS$

$\therefore$ ABC, DEF എന്നീ ത്രികോണങ്ങളുടെ ക്ഷേത്രഫലങ്ങൾ തുല്യമാണു്.

അനുസിദ്ധാന്തം: (iii)

തുല്യക്ഷേത്രഫലമുള്ള രണ്ടു ത്രികോണങ്ങൾ ഒരു ഋജുരേഖയിലുള്ള ഒരേ പാദത്തിന്മേൽ (അല്ലെങ്കിൽ തുല്യപാദങ്ങളിന്മേൽ) ഒരേ വശത്തായി സ്ഥിതി ചെയ്താൽ

ത്രികോണങ്ങൾ രണ്ടും ഒരേ ജോടി സമാന്തരരേഖകൾക്കകത്തായിരിക്കും.



<u>ദത്തം</u>.—ABC, DBC എന്നീ ത്രികോണങ്ങൾ തുല്യക്ഷേത്രഫലമുള്ളവയാണ്. ഇവ BC എന്ന ഒരേ പാദത്തിന്മേൽ BC യുടെ ഒരേ വശത്തായി സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നു.

<u>അനുമാനം</u>.—ഈ ത്രികോണങ്ങൾ ഒരേ ജോടി സമാന്തരരേഖകൾക്കകത്തായി സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നു.

<u>ക്രിയ</u>.—AR, DS എന്നിവ BC ക്കു ലംബമായി വരയ്ക്കുക.

AD യോജിപ്പിക്കുക.

ഉപപത്തി.—$\triangle ABC = \frac{1}{2}\, BC \times AR$

$\triangle DBC = \frac{1}{2}\, BC \times DS$

എന്നാൽ $\triangle ABC = \triangle DBC$ (ദത്തം)

$\therefore \quad \frac{1}{2}\, BC \times AR = \frac{1}{2}\, BC \times DS$

$\therefore \quad BC \times AR = BC \times DS$

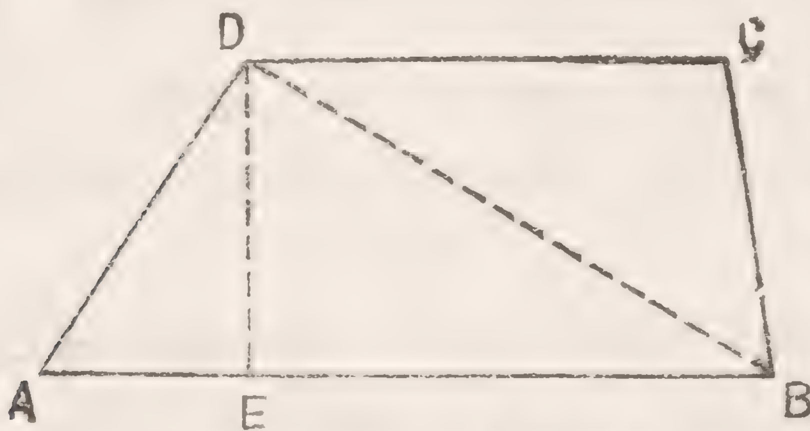
$\therefore \quad AR = DS$

∴ AD, ES എന്നീ രേഖകൾ സമാന്തരം.

∴ ABC, DBC എന്നീ ത്രികോണങ്ങൾ ഒരേ ജോടി സമാന്തരരേഖകൾക്കകത്തു സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നു.

അനുസിദ്ധാന്തം (iv)

ഒരു ലംബക (Trapezium)ത്തിന്റെ ക്ഷേത്രഫലം സമാന്തരവശങ്ങളുടെ തുകയുടെ പകുതിയും, അവ തമ്മിലുള്ള ദൂരവും ഗുണിച്ചു കിട്ടിയ ഫലത്തിനു തുല്യമായിരിക്കും.



ദത്തം — ABCD ഒരു ലംബകം. AB ∥ CD. സമാന്തരവശങ്ങൾക്കു തമ്മിലുള്ള അന്തരം DE.

അനുമാനം.—ABCD യുടെ വിസ്തീർണ്ണം = $\frac{1}{2}$ (AB + CD) DE

ഉപപത്തി:—

△ ABDയുടെ വിസ്തീർണ്ണം = $\frac{1}{2}$ AB × DE

△ BCD = $\frac{1}{2}$ CD × × DE

∴ △ ABD + △BCD = $\frac{1}{2}$ AB × DE + $\frac{1}{2}$ CD × DE

= $\frac{1}{2}$ (AB + CD)DE

അദ്ധ്യായം 37

---

1. ABC എന്ന ത്രികോണത്തിൽ BC യുടെ മദ്ധ്യബിന്ദു D ആയാൽ, AD എന്ന രേഖ, ത്രികോണത്തെ രണ്ടു സമഭാഗമാക്കുമെന്നു തെളിയിക്കുക.
2. ABC എന്ന ത്രികോണത്തിൽ BC യുടെ മദ്ധ്യബിന്ദുവാണു D. AD യിലെ ഏതെങ്കിലും ഒരു ബിന്ദു E ആയാൽ $\triangle AEB = \triangle AEC$ എന്നു തെളിയിക്കുക.
3. ABCD എന്ന സാമാന്തരികത്തിൽ AB, CD എന്നീ ഭുജങ്ങളുടെ മദ്ധ്യബിന്ദുക്കൾ യഥാക്രമം E, F ആയാൽ (i) AEFD, BEFC എന്നീ സാമാന്തരികങ്ങളുടെ വിസ്തീർണ്ണങ്ങൾ സമം എന്നും (ii) DEBF ന്റെ വിസ്തീർണ്ണം ADC എന്ന ത്രികോണത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണത്തിനു തുല്യമെന്നും തെളിയിക്കുക.
4. ABCD എന്ന സാമാന്തരികത്തിൽ AB യുടെ മദ്ധ്യബിന്ദു E. $AF = \frac{1}{3}AD$ എന്നു കിട്ടത്തക്കവണ്ണം AD യിൽ F എന്ന ബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്തിയാൽ $\triangle AEF = \frac{1}{12}$ ABCD എന്നു സമർത്ഥിക്കുക.
5. ABCD എന്ന ചതുർഭുജത്തിലെ കർണ്ണങ്ങൾ പരസ്പരം E യിൽ സന്ധിക്കുന്നു. BE = ED

ആയാൽ, B, D എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ നിന്നു AC യിലേക്കു വരയ്ക്കുന്ന ലംബങ്ങൾ തുല്യം എന്നു തെളിയിക്കുക.

6. ABCD ഒരു ദീർഘചതുരം. AC യിലെ ഏതെങ്കിലും ഒരു ബിന്ദുവാണ് E. E യിൽക്കൂടി FEG, HEK എന്ന ഋജുരേഖകൾ യഥാക്രമം AB, BC എന്നിവയ്ക്കു സമാന്തരങ്ങളായി വരച്ചാൽ $DFEH = BKEG$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

7. ABCD ഒരു സാമാന്തരികം. ACയിലുള്ള ഏതെങ്കിലും ഒരു ബിന്ദുവാണ് E. E യിൽ കൂടി FEG, HEK എന്നീ ഋജുരേഖകൾ യഥാക്രമം AB BC എന്നിവയ്ക്കു സമാന്തരങ്ങളായി വരച്ചാൽ $DFEH=BKEG$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

8. ABCD എന്ന ചതുർഭുജത്തിൽ $AB \parallel CD$. കർണ്ണങ്ങൾ പരസ്പരം E യിൽ സന്ധിക്കുന്നു. $\triangle AED=\triangle BEC$ എന്നു സമർത്ഥിക്കുക

9. ABCD എന്ന ചതുർഭുജത്തിൽ $AB \parallel CD$. P, Q എന്നിവ യഥാക്രമം AB, CD എന്നീ വശങ്ങളുടെ മദ്ധ്യബിന്ദുക്കളായാൽ PQ എന്ന രേഖ, ചതുർഭുജത്തെ രണ്ടു സമഭാഗങ്ങളാക്കുമെന്നു തെളിയിക്കുക.

10. ഒരു ചതുർഭുജത്തിലെ കർണ്ണങ്ങൾ ഓരോന്നും ചതുർഭുജത്തെ സമഭാഗമാക്കിയാൽ, അതു ഒരു സാമാന്തരികമായിരിക്കും.

11. ABCD എന്ന ചതുർഭുജത്തിൽ BD യുടെ മദ്ധ്യബിന്ദുവാണു് E. ABCE, ADCE എന്നീ ചതുർഭുജങ്ങളുടെ വിസ്തീർണ്ണങ്ങൾ തുല്യമെന്നു തെളിയിക്കുക.

12. ABCD ഒരു സാമാന്തരികം. AD യിലുള്ള ഏതെങ്കിലും ഒരു ബിന്ദു P ആയാൽ, $\triangle APC + \triangle BPD = \frac{1}{2} ABCD$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

13. ABCD എന്ന സാമാന്തരികത്തിനകത്തുള്ള ഒരു ബിന്ദു P ആയാൽ $\triangle APB + \triangle CPD = \frac{1}{2} ABCD$ എന്നു സമർത്ഥിക്കുക.

14. AC, BD എന്ന തുല്യനീളമുള്ള രണ്ടു രേഖകൾ പരസ്പരം ലംബമായി ഛേദിക്കുന്നു. ABCD യുടെ വിസ്തീർണ്ണം AC വശമായുള്ള സമചതുരത്തിന്റെ പകുതിയായിരിക്കുമെന്നു സമർത്ഥിക്കുക.

15. ABC എന്ന ത്രികോണത്തിൽ AB = AC. B, C എന്ന കോണുകളുടെ സമഭാജികൾ യഥാക്രമം AC യെ X എന്ന ബിന്ദുവിലും, AB യെ Y എന്ന ബിന്ദുവിലും ഛേദിച്ചാൽ $XY \parallel BC$ എന്നു തെളിയിക്കുക. (സൂചന.

BCX, BCY എന്നീ ത്രികോണങ്ങൾ സർവ്വസമം എന്നു തെളിയിക്കുക)

16. ABCD ഒരു ചതുർഭുജം. അതിന്റെ ഭുജങ്ങളുടെ മദ്ധ്യബിന്ദുക്കൾ യഥാക്രമം P, Q, R, S ആയാൽ ABCD=2 PQRS എന്നു സമർത്ഥിക്കുക.

അഭ്യാസം 33

1. ABCD ഒരു സാമാന്തരികം. ഇതിനോടു തുല്യവിസ്തീർണ്ണമുള്ള ഒരു സമചതുർഭുജം (Rhombus) AB യിന്മേൽ നിർമ്മിക്കുക. സാധിക്കാതെ വരുന്നതെപ്പോൾ?

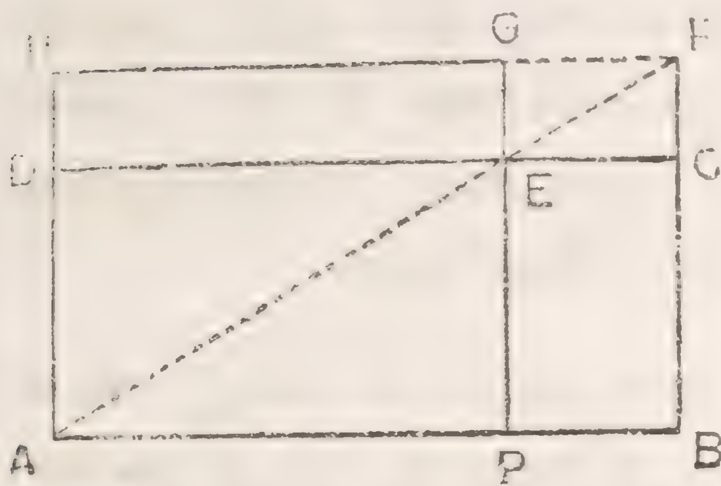
2. ABCD ഒരു ദീർഘചതുരം. AB പാദവും മറെറവശം ഒരു നിർദ്ദിഷ്ടഅളവുമുള്ള ഒരു സാമാന്തരികം, ABCD ക്ക് തുല്യമായ വിസ്തീർണ്ണത്തിൽ നിർമ്മിക്കുക.

3. ABCD എന്ന ദീർഘചതുരത്തിനോടു തുല്യവിസ്തീർണ്ണമുള്ളതും, ഒരു നിർദ്ദിഷ്ട കർണ്ണമുള്ളതുമായ ഒരു സാമാന്തരികം AB എന്ന പാദത്തിന്മേൽ നിർമ്മിക്കുക.

4. ABCD എന്ന ദീർഘചതുരത്തിനോടു തുല്യവിസ്തീർണ്ണമുള്ള ഒരു ദീർഘചതുരം ഒരു നിർ

ദ്ദിഷ്ടപാദത്തിന്മേൽ നിർമ്മിക്കുക.

(സൂചന)



പാദം AP. P യിൽ നിന്നു BC-ക്കു സമാന്തരമായി വരയ്ക്കുന്ന രേഖ CD യെ (അല്ലെങ്കിൽ CD ദീർഘിപ്പിക്കുന്ന രേഖയെ E യിൽ സന്ധിക്കുന്നു AE (അല്ലെങ്കിൽ അതിനെ ദീർഘിപ്പിക്കുന്ന രേഖ) BC യെ F-ൽ സന്ധിക്കുന്നു. ABFH എന്ന ദീർഘചതുരം പൂരിപ്പിക്കുക PE (അല്ലെങ്കിൽ അതിനെ ദീർഘിപ്പിക്കുന്ന രേഖ) FH നെ G യിൽ സന്ധിച്ചാൽ APGH=ABCD.

5. ABCD എന്ന ചതുരത്തിനു (Rectangle) തുല്യമായ വിസ്തീർണ്ണമുള്ളതും, പാദവും ഒരു കോണും നിർദ്ദിഷ്ട അളവുകൾ ഉള്ളതുമായ ഒരു സാമാന്തരികം നിർമ്മിക്കുക.

6. ABCD എന്ന സാമാന്തരികത്തിനു തുല്യവിസ്തീർണ്ണമുള്ളതും, നിർദ്ദിഷ്ടവശങ്ങളോടുകൂടിയതുമായ ഒരു സാമാന്തരികം നിർമ്മിക്കുക.

7. ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു വശത്തു സ്ഥിതിചെയ്യുന്ന ഏതെങ്കിലും ഒരു ബിന്ദുവിൽകൂടി ത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു സമഭാജി വരയ്ക്കുക.

8. ABC എന്ന ത്രികോണത്തിനു തുല്യമായ വിസ്തീർണ്ണമുള്ളതും, ഒരു നിർദ്ദിഷ്ടകോണിനെ

ഉൾക്കൊള്ളുന്നതുമായ ഒരു സാമാന്തരികം നിർമ്മിക്കുക.

9. ABC ഒരു ത്രികോണം, BC യിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്ന ഒരു ബിന്ദുവാണ് P. BP പാദമാക്കി ACB ക്ക് തുല്യമായ വിസ്തീർണ്ണമുള്ള ഒരു ത്രികോണം നിർമ്മിക്കുക.

10. ഏതെങ്കിലും ഒരു ചതുർഭുജം വരച്ച്, അതിനോട് തുല്യവിസ്തീർണ്ണമുള്ള ഒരു ത്രികോണം നിർമ്മിക്കുക.

11. ABCD എന്ന ചതുർഭുജത്തിൽ AB=3cm BC=2 5cm., ∠B=90°, CD=3cm., AD=4 cm.; ABCD നിർമ്മിക്കുക. BC ഒരു ഭുജമായും, വേറൊരു ഭുജം BA യിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യത്തക്കവണ്ണവും ABCD ക്ക് തുല്യമായ വിസ്തീർണ്ണമുള്ള ഒരു ത്രികോണം നിർമ്മിക്കുക.

12. AB = 3cm., BC = 4cm, CD = 3·5cm., AD=5 cm, ∠C = 70° അളവുകളുള്ള ABCD എന്ന ചതുർഭുജംവരച്ച്, അതിനോട് തുല്യവിസ്തീർണ്ണമുള്ള ഒരു ദീർഘചതുരം നിർമ്മിക്കുക.

13. ഒരു പഞ്ചഭുജം വരച്ച്, അതിനോട് തുല്യവിസ്തീർണ്ണമുള്ള ഒരു ത്രികോണം നിർമ്മിക്കുക.

നിർമ്മിതി 1.

ഒരു ഋജുരേഖയിലുള്ള ഒരു നിർദ്ദിഷ്ട ബിന്ദുവിൽ, തന്നിരിക്കുന്ന ഒരു കോണിനു തുല്യമായ ഒരു കോണു് നിർമ്മിക്കുക.



∠A തന്നിരിക്കുന്ന കോണു്. PQ എന്ന രേഖയിൽ P എന്ന ബിന്ദുവിൽ A യ്ക്കു തുല്യമായ ഒരു കോണു് വരയ്ക്കണം.

ക്രിയ:—A കേന്ദ്രമാക്കി ഏതെങ്കിലും സൌകര്യമുള്ള വ്യാസാർദ്ധത്തിൽ ഒരു ചാപം വരയ്ക്കുക. അതു കോണിൻെറ ഭുജങ്ങളെ B, C എന്ന ബിന്ദുക്കളിൽ ഛേദിക്കട്ടെ. P കേന്ദ്രമാക്കി അതേ വ്യാസാർദ്ധത്തിൽ ഒരു ചാപം വരയ്ക്കുക. അതു PQ വിനെ S എന്ന ബിന്ദുവിൽ ഛേദിക്കുന്നു. S കേന്ദ്രമാക്കി BC യുടെ നീളം വ്യാസാർദ്ധമാക്കി ഒരു ചാപം വരയ്ക്കുക. അതു മുമ്പിലത്തെ ചാപത്തെ R-ൽ ഛേദിക്കുന്നു. PR വരയ്ക്കുക. ഇപ്പോൾ RPQ എന്ന കോണു A എന്ന കോണിനു തുല്യമായിരിക്കും.

ഉപപത്തി:— BC, SR ഇവ യോജിപ്പിക്കുക.

ABC, PSR എന്നീ ത്രികോണങ്ങളിൽ

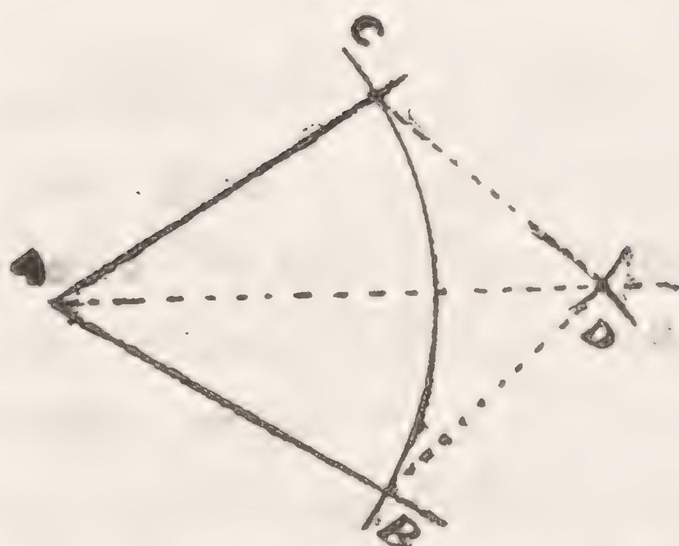
$$\left.\begin{array}{l} AB=PS \\ AC=PR \\ BC=SR. \end{array}\right\} \text{ക്രിയ}$$

$\therefore \triangle ABC \equiv \triangle PSR$

$\therefore \angle A = \angle P.$

നിർമ്മിതി 2.

ഒരു കോണിനെ രണ്ടു സമഭാഗമാക്കുക



A എന്ന കോണിനെ രണ്ടു സമഭാഗമാക്കണം.

ക്രിയ:- A കേന്ദ്രമാക്കി, ഏതെങ്കിലും സൗകര്യമുള്ള വ്യാസാർദ്ധത്തിൽ ഒരു ചാപം വരയ്ക്കുക. അതു കോണിന്റെ ഭുജങ്ങളെ B, C എന്ന ബിന്ദുക്കളിൽ ഛേദിക്കുന്നു. B കേന്ദ്രമാക്കി BC യുടെ പകുതിയിൽ കൂടുതൽ വ്യാസാർദ്ധത്തിൽ ഒരു ചാപവും C കേന്ദ്രമാക്കി അതേ വ്യാസാർദ്ധത്തിൽ വേറൊരു ചാപവും വരയ്ക്കുക. ഇവ തമ്മിൽ D യിൽ ഛേദിക്കട്ടെ. AD വരയ്ക്കുക. ഇപ്പോൾ AD എന്ന രേഖ ∠A യെ രണ്ടു സമഭാഗങ്ങളാക്കുന്നു.

അതായതു $\angle BAD = \angle CAD.$

<u>ഉപപത്തി</u>:—BD, CD ഇവ യോജിപ്പിക്കുക.

ABD, ACD എന്നീ ത്രികോണങ്ങളിൽ

AB=AC

BD=CD

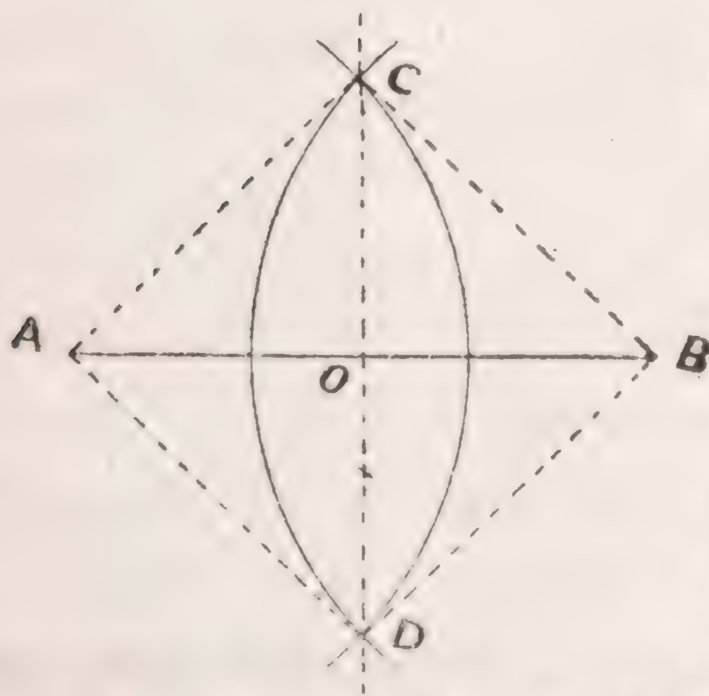
AD പൊതുഭുജം

∴ △ ABD ≡ △ ACD

∴ ∠ BAD=∠CAD

നിർമ്മിതി 3

ക്ലിപ്തനീളമുള്ള ഒരു ഋജുരേഖയുടെ മദ്ധ്യലംബം വരയ്ക്കുക:



AB യ്ക്കു മദ്ധ്യലംബം വരയ്ക്കണം.

<u>ക്രിയ</u>:—A കേന്ദ്രമാക്കി AB യുടെ പകുതിയിൽ കൂടുതൽ വ്യാസാർദ്ധത്തിൽ ഒരു ചാപവും, B കേന്ദ്രമാക്കി അതേ വ്യാസാർദ്ധത്തിൽ വേറൊരു ചാപവും വരയ്ക്കുക. ഇവ തമ്മിൽ C, D എന്ന ബിന്ദുക്കളിൽ ഛേദിക്കുന്നു.

CD വരയ്ക്കുക. അതു AB യെ O യിൽ ഖണ്ഡിക്കട്ടെ. ഇപ്പോൾ CD, AB യുടെ മദ്ധ്യലംബം O, AB യുടെ മദ്ധ്യബിന്ദു.

<u>ഉപപത്തി.</u>—AC, B-ൽ, AD, BD ഇവ യോജിപ്പിക്കുക.

ACD, BCD എന്നീ ത്രികോണങ്ങളിൽ

$AC = BC$

$AD = BD$

CD പൊതുഭുജം

$\therefore \triangle ACD \equiv \triangle BCD$

$\therefore \angle ACO = \angle BCO$

ഇപ്പോൾ ACO, BCO എന്നീ ത്രികോണങ്ങളിൽ

$AC = BC$

CO പൊതുഭുജം

ഉം $\angle ACO = \angle BCO$

$\therefore \triangle ACO \equiv \triangle BCO$

$\therefore AO = BO;\ \angle AOC = \angle BOC$

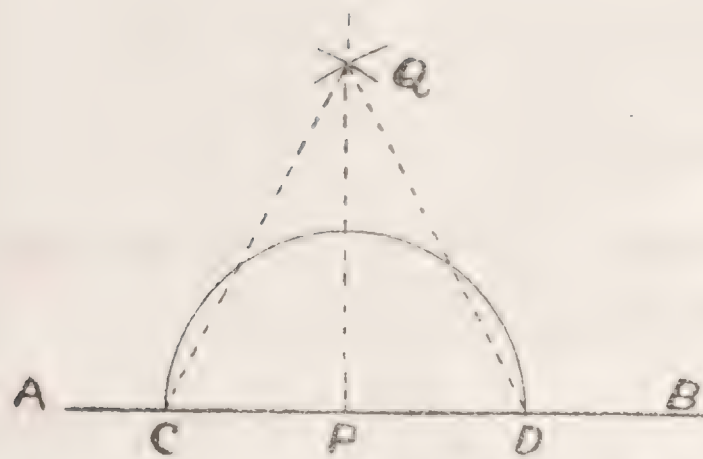
എന്നാൽ $\angle AOC + \angle BOC = 180^\circ$

$\therefore$ ഓരോന്നും 90°

$\therefore$ CD, AB യുടെ മദ്ധ്യലംബമാണ്.

നിർമ്മിതി 4 (a)

ഒരു ഋജുരേഖയും, ആ രേഖയിലുള്ള ഒരു നിർദ്ദിഷ്ടബിന്ദുവിൽക്കൂടി ലംബം വരയ്ക്കുക



AB എന്ന ഋജുരേഖയിൽ P എന്ന ബിന്ദു തന്നിരിക്കുന്നു. P യിൽ കൂടി AB ക്കു ലംബം വരയ്ക്കണം.

<u>ക്രിയ</u>:—P കേന്ദ്രമാക്കി ഏതെങ്കിലും സൌകര്യമുള്ള വ്യാസാർദ്ധത്തിൽ ഒരു ചാപം വരയ്ക്കുക. അതു AB യെ C, D എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ ഛേദിക്കട്ടെ. C കേന്ദ്രമാക്കി CD യുടെ പകുതിയിൽ കൂടുതൽ വ്യാസാർദ്ധത്തിൽ ഒരു ചാപവും D കേന്ദ്രമാക്കി അതേ വ്യാസാർദ്ധത്തിൽ വേറൊരു ചാപവും വരയ്ക്കുക. ഇവ രണ്ടും തമ്മിൽ Q എന്ന ബിന്ദുവിൽ ഛേദിക്കുന്നു. PQ വരയ്ക്കുക. ഇപ്പോൾ PQ എന്ന രേഖ AB ക്ക് ലംബമാണ്.

<u>ഉപപത്തി</u>:— CQ, DQ ഇവ യോജിപ്പിക്കുക.

CPR, DPQ എന്നീ ത്രികോണങ്ങളിൽ,

CH=DP

CQ=DQ

PQ പൊതുഭുജം

$\therefore \Delta CPQ = \Delta DPQ$

$\therefore \angle CPQ = \angle DPQ$

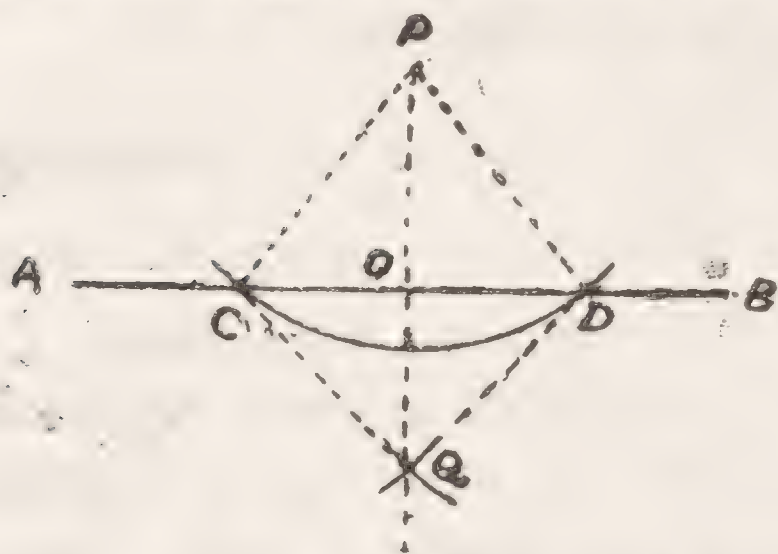
എന്നാൽ ഇവയുടെ തുക 180°

∴ ഓരോന്നും 90°

∴ PQ | AB.

നിൎമ്മിതി 4 (b)

ഒരു ഋജുരേഖയിലേയ്ക്കു, അതിനു വെളിയിലുള്ള ഒരു നിൎദ്ദിഷ്ടബിന്ദുവിൽനിന്നു ലംബംവരയ്ക്കുക.



AB ഒരു ഋജുരേഖ. P വെളിയിലുള്ള ഒരു ബിന്ദു. P യിൽനിന്നു AB യിലേക്കുലംബം വരയ്ക്കേണം.

ക്രിയ:—P കേന്ദ്രമാക്കി സൌകൎയ്യമുള്ള വ്യാസാൎദ്ധത്തിൽ AB യെ C, D എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ ഛേദിക്കത്തക്കവണ്ണം ഒരു ചാപം വരയ്ക്കുക. C കേന്ദ്രമാക്കി CD യുടെ പകുതിയിൽ കൂടുതൽ വ്യാസാൎദ്ധത്തിൽ ഒരു ചാപവും, D കേന്ദ്രമാക്കി അതേ വ്യാസാൎദ്ധത്തിൽ വേറൊരു ചാപവും വരയ്ക്കുക. ഇവ രണ്ടും Q വിൽ സന്ധിക്കുന്നു. PQ വരയ്ക്കുക, അതു AB യെ O എന്ന ബിന്ദുവിൽ സന്ധിക്കുന്നു. ഇപ്പോൾ PQ എന്ന രേഖ AB ക്കു ലംബമായിരിക്കും.

ഉപപത്തി:—PC, PD, CQ, DQ, ഇവ യോജിപ്പിക്കുക.

CPQ. DPQ എന്നീ ത്രികോണങ്ങളിൽ

CP=DP

CQ=DQ

PQ പൊതുഭുജം

$\therefore \triangle CPQ \equiv \triangle DPQ$

$\therefore \angle CPO = \angle DPO$

ഇപ്പോൾ CPO DPO എന്നീ ത്രികോണങ്ങളിൽ

$OP = DP$

PO പൊതുഭുജം

ഉം $\angle CPO = \angle DOP$

$\therefore \triangle COP = \triangle DPO$

$\therefore \angle COP = \angle DOP$

എന്നാൽ ഇവയുടെ തുക $180°$

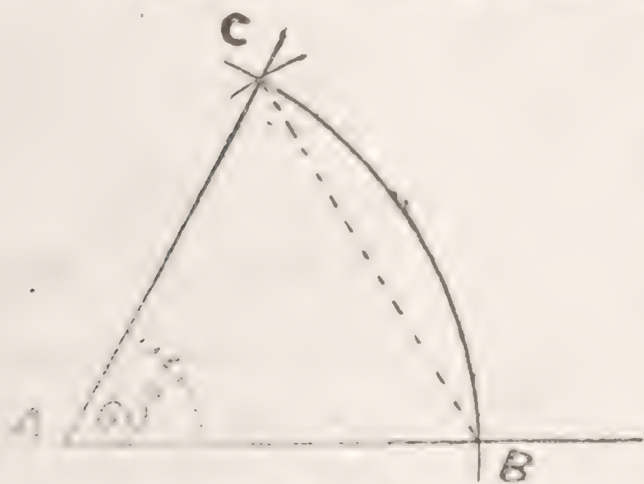
$\therefore$ ഓരോന്നും $90°$

$\therefore$ PQ, AB ക്കു ലംബമാണു്.



നിർമ്മിതി 5.

(a) $60°$ അളവുള്ള കോണു് വരയ്ക്കുക



ക്രിയ:—AB രേഖ വരയ്ക്കുക. A കേന്ദ്രമാക്കി AB യുടെ നീളം വ്യാസാർദ്ധമാക്കി ഒരു ചാപം വരയ്ക്കുക. B കേന്ദ്രമാക്കി, അതേ വ്യാസാർദ്ധത്തിൽ ഒരു ചാപം വരയ്ക്കുക അവ തമ്മിൽ തമ്മിൽ C യിൽ ഛേദിക്കട്ടെ. AC വരയ്ക്കുക.

ഇപ്പോൾ $\angle CAB = 60°$

ഉപപത്തി:— BC യോജിപ്പിക്കുക.

ABC എന്ന ത്രികോണത്തിൽ

AB = AC

$\therefore \angle B = \angle C$

അതുപോലെ തന്നെ AB=CBC

$\therefore \angle A = \angle C$

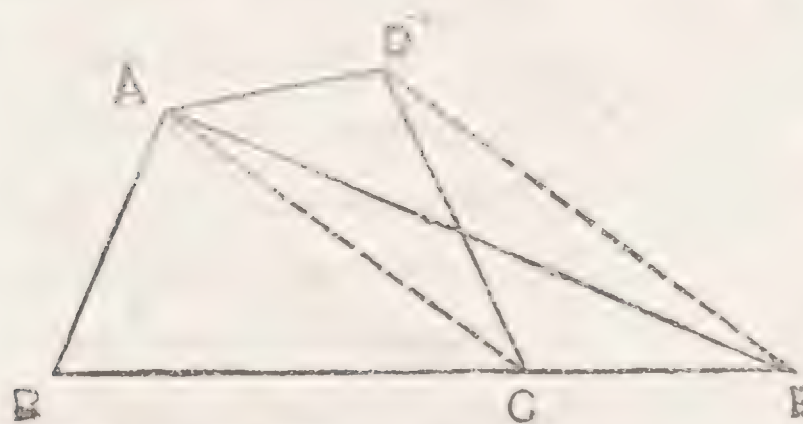
$\therefore \angle A = \angle B = \angle C$

എന്നാൽ ഇവയുടെ തുക 180°

$\therefore$ ഓരോന്നും 60°

നിർമ്മിതി 6.

ഒരു നിർദ്ദിഷ്ട ചതുർഭുജത്തിനോടു തുല്യവിസ്തീർണ്ണമുള്ള ഒരു ത്രികോണം നിർമ്മിക്കുക.



ദത്തം:—ABCD ഒരു ചതുർഭുജം ABCD ക്കു തുല്യമായ വിസ്തീർണ്ണമുള്ള ഒരു ത്രികോണം നിർമ്മിക്കണം.

ക്രിയ:—AC വരയ്ക്കുക. D യിൽകൂടി AC ക്കു സമാന്തരമായി DE വരയ്ക്കുക. ഇതു BC യെ ദീർഘിപ്പിച്ച രേഖയെ E യിൽ സന്ധിക്കുന്നു.

ഇപ്പോൾ ABE യാണു് ആവശ്യപ്പെട്ട ത്രികോണം.

അതായതു $\triangle ABE =$ ചതുർഭുജം ABCD.

[ഇതിന്റെ ഉപപത്തി എഴുതുക.]

ഉപപത്തി :—

ACD, ACE എന്നീ ത്രികോണങ്ങൾ AC എന്ന പാദത്തിന്മേൽ, AC, DE എന്നീ സമാന്തരങ്ങൾക്കിടയ്ക്കു സ്ഥിതിചെയ്യുന്നു.

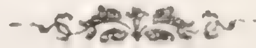
$\therefore \triangle ACD = \triangle ACE.$

ഇതിലെ ഓരോ വശത്തോടും $\triangle ABC$ യെ കൂട്ടുക

അപ്പോൾ $\triangle ABC + \triangle ACD = \triangle ABC + \triangle ACE$

$\therefore ABCD = \triangle ABE$

ഉത്തരങ്ങൾ



അഭ്യാസം 1

1. x^2y 2. a^2y^3 3 $2b^2x^2$

4. $5c^2d^2f$ 5. $6m^3u$ 6. $a \times a \times a \times b$ &c.

അഭ്യാസം 2

1. m^8 2. n^{13} 3. $2a^5$

4. $12b^9$ 5. $3x^7$ 6 $\frac{3}{8}y^{13}$

7. $\frac{1}{2}z^{14}$ 8. $8c^6$ 9. $15d^6$

10. $9p^{11}$ 11. a^5b^5 12. q^8r^9

13. $20x^6y^7$ 14. $a^7b^7c^7$ 15. $m^9n^6k^6$

16. $2p^3q^6r^7$ 17. $4a^7b^{11}x^{12}$

അഭ്യാസം 3

1. a^4 2. b^2 3. $\frac{1}{c}$ 4. $\frac{1}{d^5}$ 5. $2k$

6. $2l^2$ 7. $3m^4$ 8. $3n^4$ 9. $5y$ 10 $\frac{2}{p^2}$

11. $\frac{1}{2}p^2$ 12. $\frac{2}{x^2}$ 13 $\frac{3}{2}a^2$ 14. xy^2 15. $\frac{y^2}{z}$

16. $3abc$ 17. $7b^2c^3$ 18. xy^3 19. x^6y 20. ab^6

21. $2b^5c^3$ 22. a^3b^2 23. mn^2 24. $\frac{2c^4}{b^5a^3}$

അഭ്യാസം 4

---

1. x^{12} 2. x^{30} 3. x^{20} 4. x^4y^2

5. y^9z^{12} 6. $8a^6b^3$ 7. a^9b^{12} 8. $27c^3x^9$

9. $\frac{1}{16}c^4d^4$ 10. $\frac{1}{27}k^{15}l^9$ 11. $k^8l^{12}m^{16}$

12. $125x^9y^6z^3$ 13 a^6b^{10} 14. x^9y^{16}

15. $16c^7d^6$ 16. $p^{13}q^8$

അഭ്യാസം 5

---

1 a^5 2. b^6 3. x^8 4. a^2b^3

5. a^5b^6 6 x^4y^8 7. $2x^2y^4$ 8. $4x^4y^6$

9 $\frac{1}{2}x^2y^8$ 10. c^5d^8 11. $4m^6n^7$ 12. $7x^4y^3z^5$

13. ab^2 14. p^3q^4 15. $2xy^4$ 16. $3m^8n^7$

17. $p^2q^3r^6$ 18. $4x^5y^8$ 19. ab^2 20. c^2d^4

21. $2k^3m^2$ 22. $3lm^2n^3$ 23 b^9c 24. $x^4y^3z^3$

അദ്ധ്യായം 6

---

1. x 2. $-2x$ 3. $-x$ 4. $-3a$

5. $-8a$ 6. $-2a$ 7. $-a$ 8. $-2b$

9. $-14x$ 10. $-15p$ 11. $7ab$ 12. $-a^2$

13. $-16xy$ 14. $+5x$ 15. -5 16. x

17. 5 18. -8 19. -7 20. -15

21. $-4x$ 22. $-5y$ 23. $-1\frac{3}{4}m$ 24. $-2n$

25. $3p+4q$ 26. $-14p+2q$ 27. $6x+2y$

28. $3x+3y+2z$ 29. $m+2n-2r$ 30. $-7x^2+14y^2$

31. $5x-3y$ 32. $-a-2b$ 33. $6x-7y$

34. $-3b$ 35. $x+y+z$ 36. $2x+{}^{\circ}y+2z$

37. 0 38. $4p+4q+4r$ 39. a^2+3a-8

40. $-4m-n-5$ 41. $3m^2+1$ 42. n^2-9n-3

അദ്ധ്യായം 7

---

1. 9 2. 0 3. -3 4. -6

5. $-3x$ 6. $-8y$ 7. $+3y$ 8. $-4x$

9. 0 10. $2x+3y$ 11. $3x$ 12. $3a+9b$

13. $-3a-3b$ 14. $-5b+4c$ 15. $a-3b+4c$

16. $-x+7y-2z$ 17. r 18. $7p$ 19. $3a+17b+4$

20. $3y-12$ 21. $a-e$ 22. $m-1$ 23. $2n^2-2$

24. n^2+5n-4 25. $4ab$ 28. $-2ab+2b^2$ 29. l^2+4l+2

അഭ്യാസം 8

1. $2a-2$ 2. $ax+bx$ 3. $5x-5y$

4. $2xy+3y$ 5. $7m-14n$ 6. $6x-9y$

7. $4y+4x$ 8. $3x^2-3xy$ 9. $x-\frac{3}{2}$

10. $2xy+3xz$ 11. $\frac{9a}{2}-6$ 12. $-3a+3$

13. $-4x-2y$ 14. $-3ax+3bx$ 15. $-2xy+2y$

16. $-15m-10m$ 17. $-2x^2+6xy$ 18. $-2a+\frac{3}{2}$

19. $-3x+\frac{9}{2}$ 20. $-2x+4$ 21. x^2+3x+2

22. x^2+2x+1 23. x^2+4x+4 24. x^2+5x+6

25. x^2+4x+3 26. $x^2+7x+10$ 27. y^2+6y+9

28. $y^2+7y+12$ 29. y^2+5y+4 30. y^2+6y+8

31. y^2+6y+5 32. $y^2+8y+16$ 33. $a^2+7a+10$

34. $a^2+9a+20$ 35. $a^2+8a+15$ 36. a^2+7a+6

37. $a^2+8a+12$ 38. $a^2+9a+18$ 39. $b^2+10b+24$

40. $b^2+11b+30$ 41. $b^2+10b+25$ 42. $b^2+12b+36$

43. b^2+8b+7 44. $b^2+9b+14$ 45. m^2-m-2

46. m^2-m-6 47. m^2-2m-3 48. m^2-2m-8

49. m^2-3m-4 50. m^2+m-6 51. n^2+n-6

52. n^2+2n-3 53. $n^2+2n-15$ 54. a^2-3n-4

55. n^2-2n-8 56. n^2-n-12 57. $p^2+pq-2q^2$

58. $2p^2-5pq+3q^2$ 59. $3p^2-7pq+2q^2$

60. $a^2b^2-5ab+6$ 61. $2x^2y^2-7xy+3$

62. x^4-3x^2+2 63. $2x^2-2x+\frac{1}{2}$

64. $6x^2-13xy+6y^2$ 65. l^4-l^2-6

66. l^4-12l^2+20 67. x^4-7x^2+12

68. $a^2+ab-a+b-2$ 69. $a^2+3b-2a-3b+1$

70. $2x^2-3xy-3x+9y-9$ 71. $6x^2-5xy+y^2+2x-y$

72. $a^2+ab-ac-2b^2+bc$

അദ്ധ്യായം 9

1. $x^2+2xp+p^2$ 2. x^2+2x+1 3 x^2+4x+4
4. x^2+6x+9 5 $x^2+8x+16$ 6. $x^2+10x+25$
7. $x^2+12x+36$ 8. $x^2+14x+49$ 9. $x^2+16x+64$
10 $x^2+18x+81$ 11. $x^2+20x+100$ 12. y^2-2y+1
13. y^2-4y+4 14 y^2-6y+9 15. $y^2-8y+16$
16 $y^2-10y+25$ 17. $y^2-12y+36$ 18. $y^2-14y+49$
19. $m^2+4mn+4n^2$ 20 $m^2-4mn+4n^2$
21. $4m^2+12mn+9n^2$ 22. $4m^2-12mn+9n^2$
23. $x^2+x+\frac{1}{4}$ 24 $n^2-n+\frac{1}{4}$ 25. $n^2-\frac{2}{3}n+\frac{1}{9}$
26. $n^2-\frac{1}{2}n+\frac{1}{16}$ 27. $a^2b^2-6ab+9$ 28 $x^2y^2-10xy+25$
29. x^4+2x^2+1 30. x^4-6x^2+9 31. x^2-1
32 x^2-4 33. p^2-9 34. p^2-16
35. l^2-25 36 l^2-36 37. $y^2-\frac{1}{4}$
38. x^2y^2-4 39. $4x^2-9$ 40. $9a^2-25$
41. $4d^2-25$ 42. $25k^2-4$ 43. k^4-9 44. b^4-25

അദ്ധ്യായം 10

1. x^2+3x+2 2. x^2+4x+3 3. x^2+5x+6
4. x^2+5x+4 5 x^2+6x+8 6. x^2+6x+5
7. x^2+6x+9 8. $x^2+7x+12$ 9. $x^2+7x+10$
10. x^2+7x+6 11. $x^2+8x+16$ 12. $x^2+8x+15$
13. $x^2+8x+12$ 14. x^2+8x+7 15. $a^2+9a+20$
16. $a^2+9a+18$ 17. $a^2+9a+14$ 18. a^2+9a+8
19. $a^2+10a+24$ 20. $a^2+10a+21$ 21. $a^2+10a+16$

22. $a^2+10a+9$ 23. $b^2+11b+30$ 24. $b^2+11b+28$

25. $b^2+11b+24$ 26. $b^2+11b+18$ 27. $b^2+11b+10$

28. $m^2+12m+35$ 29. $m^2+12m+32$ 30. $m^2+12m+27$

31. $m^2+12m+20$ 32. $m^2+12m+11$ 33. x^2-3x+2

34. x^2-4x+3 35. x^2-5x+6 36. a^2-5a+4

37. a^2-6a+8 38. b^2-6b+9 39. k^2-6k+5

40. $k^2-7k+10$ 41. $y^2-7y+12$ 42. y^2-7y+6

43. $d^2-8d+15$ 44. $d^2-8d+12$ 45. d^2-8d+7

46. $n^2-9n+20$ 47. $n^2-9n+18$ 48. $n^2-9n+14$

49. n^2-9n+8 50. $p^2-10p+25$ 51. $p^2-10p+24$

52. $p^2-10p+21$ 53. $p^2-10p+16$ 54. $p^2-10p+9$

55. $x^2-11x+30$ 56. $y^2-11y+28$ 57. $z^2-11z+24$

58. $c^2-11c+18$ 59. $c^2-11c+10$ 60. $l^2-12l+35$

61. $l^2-12l+32$ 62. $l^2-12l+27$ 63. $t^2+12t+20$

64. $t^2-12t+11$ 65. $x^2+3x-10$ 66. x^2+2x-8

67. y^2+y-6 68. $y^2+2y-15$ 69. $a^2+3a-18$

70. $a^2+3a-28$ 71. b^2+4b-5 72. $b^2+4b-12$

73. $c^2+5c-14$ 74. $c^2+3c-40$ 75. d^2+d-56

76. $d^2+2d-48$ 77. $h^2+2h-24$ 78. h^2+4h-5

79. $k^2+7k-18$ 80. $k^2+6k-40$ 81. $x^2-2x-15$

82. x^2-3x-4 83. x^2-x-20 84. y^2-y-2

85. y^2-y-6 86. a^2-a-30 87. $a^2-5a-14$

88. $b^2-10b-24$ 89. $b^2-9b-36$ 90. $c^2-8c-48$

91. $c^2-15c-100$ 92. $d^2-12d-45$ 93. $d^2-11d-12$

94. $d2-11d-26$ 95. $h^2-10h-39$ 96. $h^2-13h-30$

97. $k^2-14k-15$ 98. $k^2-14k-32$

99. $k^2-16k-57$ 100. $x^2-19x-92$

അദ്ധ്യായം 11

1. $(x+1)^2$ 2 $(x+2)^2$ 3. $(x+3)^2$ 4 $(x+5)^2$
5. $(x+6)^2$ 6. $(x+7)^2$ 7. $(x+8)^2$ 8. $(x+9)^2$
9. $(x+10)$ 10. $(x-6)^2$ 11. $(x-7)^2$ 12. $(\ -10)^2$
13 $(x-11)^2$ 14. $(x+20)^2$ 15. $(x+3y)^2$ 16. $(x+4y)^2$
17. $(2x+3y)^2$ 18. $(x-2y)^2$ 19. $(3a-4b)^2$ 20. $(a-10x)$
21. $(5-1a)^2$ 22. $(x+\frac{1}{2})^2$ 23. $(a-\frac{1}{3})^2$ 24. $(x+\frac{1}{3})^2$
25. $(m+\frac{1}{4})^2$ 26. $(a^2-x^2)^2$

അദ്ധ്യായം 12

1 $(a+3)(a-3)$ 2. $(ab+1)(ab-1)$
3. $(m+5)(m-5)$ 4. $(6+y)(6-y)$
5. $(7+2x)(7-2x)$ 6. $(3x+4y)(3x-4y)$
7. $(2c+5d)(2c-5d)$ 8. $(x+\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2})$
9. $(xy+\frac{1}{3})(xy-\frac{1}{3})$ 10. $(\frac{\ }{4}+\frac{1}{5})(\frac{x}{4}-\frac{1}{5})$
11. $(y+\frac{3}{4})(y-\frac{3}{4})$ 12. $(ab+c)(ab-c)$
13. $(a^2+1)(a+1)(a-1)$ 14. $(x^2+y^2)(x+y)(x-y)$
15. $(p+q^2)(p-q^2)$ 16. $(m^2+3n)(m^2-3n)$
17. $(2a+9b)(2a-9b)$ 18. $(3+xy)(3-xy)$
19. $(+abc)(1-abc)$ 20. $(13+9y)(13-9y)$
21. $(2ab+5x)(2ab-5x)$ 22. $(1+20xy)(1-20xy)$
23. $(2a^2+7b^2)(2a^2-7b^2)$ 24. $(a^4+1)(a^2+1)(a+1)(a-1)$
25. $(x^2+4y^2)(x+2y)(x-2y)$ 26. $(x+y+a)(x+y-a)$
27. $(a+b+c)(a+b-c)$ 28. $(a-b+c)(a-b-c)$

29. $(a+2b+x)(a+2b-x)$ 30. $(x+y+1)(x+y-1)$

31. $(x+2y+3)(x+2y-3)$ 32. $(3x+2y+4)(3x+2y-4)$

33. $(x-5y+11)(x-5y-11)$ 34. $(2x+2y)(2x-4y)$

35. $(4a-b)(4a-5b)$ 36. $(5a-5b)(-a-5b)$

37. $(5x-3y)(-3x-3y)$ 38. $(a+b+c)(a-b-c)$

39. $(m+n-k)(m-n+k)$ 40. $(1+2a+b)(1-2a-b)$

41. $(b+3c-d)(b-3c+d)$ 42. $(2x+b-2c)(2x-b+2c)$

43. $(3a+2b-c)(3a-2b+c)$

44. $(m+n+a+b)(m+n-a-b)$

45. $(x+y+c+d)(x+y-c-d)$

46. $(a-b+c-d)(a-b-c+d)$

47. $(k-l+p-q)(k-l-p+q)$

48. $(3a+2b)(a+2b)$ 49. $(4x-3y)(-2x+y)$

50. $x(7x+4y)$ 51. 788

52. 9000 53. 400 54. 7800

55. 17 56. 511000

അദ്ധ്യായം 13

---

1. $(x+1)(x+2)$ 2. $(x+1)(x+3)$ 3. $(x+2)^2$

4. $(x+1)(x+4)$ 5. $(x+3)^2$ 6. $(x+2)(x+4)$

7. $(x+1)(x+5)$ 8. $(x+2)(x+5)$ 9. $(x+1)(x+6)$

10. $(x+4)^2$ 11. $(x+3)(x+5)$ 12. $(x+2)(x+6)$

13. $(x+1)(x+7)$ 14. $(x+4)(x+5)$ 15. $(x-1)^2$

16. $(x-2)^2$ 17. $(x-1)(x-4)$ 18. $(x-3)^2$

19. $(x-2)(x-4)$ 20. $(x-1)(x-5)$ 21. $(x-2)(x-5)$

22. $(x-1)(x-6)$ 23. $(x-4)^2$ 24. $(x-3)(x-5)$

25. $(x-2)(x-6)$ 26. $(x-1)(x-7)$

27. $(x-4)(x-5)$ 28. $(x-3)(x-6)$

29. $(x+5)(x-3)$ 30. $(x+4)(x-2)$
31. $(x+3)(x-1)$ 32. $(x+2)(x-1)$
33. $(x+4)(x-3)$ 34. $(x+5)(x-4)$
35. $(x+4)(x-1)$ 36. $(x+5)(x-2)$
37. $(x+6)(x-3)$ 38 $(x+5)(x-1)$
39. $(x+6)(x-2)$ 40. $(x+7)(x-3)$
41. $(x+6)\ x-1)$ 42. $(x+8)(x-3)$
43. $(x+3)(x-5)$ 44. $(x-4)(x+2)$
45. $(x-3)(x+1)$ 46. $(x-2)(x+1)$
47. $(x-4)(x+3)$ 48. $(x-5)(x+4)$
49. $(x-4)(x+1)$ 50 $(x-5)(x+2)$
51. $(x-6)(x+3)$ 52. $(x-5)(x+1)$
53. $(x-6)(x+2)$ 54. $(x-7)(x+3)$
55. $(x-6)(x+1)$ 56. $(x-8)(x+3)$

അഭ്യാസം 14

1. $5(1+2x)$ 2. $7(x-2y)$ 3. $a(2+b)$
4. $a(a-b)$ 5. $m(m-4n)$ 6. $m^2(m+1)$
7. $ab(a-b)$ 8. $2a^2(a-2)$ 9. $3x(x-2y)$
10. $4x(x-2y)$ 11. $3x^3(x-3)$ 12. $3m(2m-3n)$
13. $2xy(1+2xy)$ 14. $3x^3(x^2-2)$ 15. $5a^2b^2(a-2b)$
16. $2x^3y^2(x^3+2y^3)$ 17. $3k^2l(1-2l)$ 18. $4x^3(x^6-2)$
19. $m(m+n+k)$ 20. $2a(4a^2+a-2)$ 21. $3x(2x^4+x^2+3$
22. $b(a^3-a^2b-b^2)$ 23. $3xy(x-3y+2y^2)$
24. $xy^2(x^2+y-x)$ 25. $abc(a^2-c+b)$
26. $(a+b)(x+y)$ 27. $(b-c)(a+d)$
28. $(x+y)(x-y)$ 29, $(x-a)(x-b)$

30. $(a-1)(x-y)$ 31. $(y^2+1)(x+2)$

32. $(y+1)(x^2+1)$ 33. $(b+1)(x-1)$

34. $(a-b)(k-1)$ 35. $(a+x)(a+b)$

36. $(a+b)(a-c)$ 37. $(x+1)(x^2+1)$

38. $(x-1)(x^2+1)$ 39. $(a-3)(a^2+4)$

40. $(a-2b)(a+x)$ 41. $(b-c)(a-d)$ 42. $(a-2x)(2y-x)$

അഭ്യാസം 15

1. $(x+1)(x+3)$ 2. $(x+2)(x+3)$ 3. $(x+2)(x+4)$

4. $(x+1)(x+5)$ 5. $(x+3)^2$ 6. $(x+2)(x+5)$

7. $(x+3)(x+4)$ 8. $(+4)^2$ 9. $(x+3)(x+5)$

10. $(x+2)(x+6)$ 11. $(+4)(h+5)$ 12. $(a+3)(a+6)$

13. $(y+2)(y+7)$ 14. $(y+1)(y+8)$ 15. $(a+4)(a+6)$

16. $(a+3)(a+7)$ 17. $(b+5)(b+6)$ 18. $(b+4)(b+7)$

19. $(b+2)(b+9)$ 20. $(m+5)(m+7)$ 21. $(x-1)(x-7)$

22. $(x-3)(x-8)$ 23. $(x-1)(x-11)$

24. $(x-1)(x-2)$ 25. $(l-1)(l-3)$

26. $(l-1)(l-6)$ 27. $(k-1)(k-4)$

28. $(a-2)(a-4)$ 29. $(b-3)^2$

30. $(k-2)(k-5)$ 31. $(m-3)(m-4)$

32. $(m-1)(m-6)$ 33. $(p-2)(p-8)$

34. $(p-1)(p-9)$ 35. $(p-4)(p-7)$

36 $(n-2)(n-9)$ 37 $(x+5)(x-2)$

38. $(x+4)(x-2)$ 39 $(y+3)(y-2)$

40 $(y+5)(y-3)$ 41. $(a+6)(a-3)$

42. $(b+5)(b-1)$ 43. $(b+6)(b-2)$

44. $(c+8)(c-5)$ 45. $(k+10)(k-4)$

46. $(x-5)(x+3)$ 47. $(x-5)(x+4)$

48. $(y-3)(y+2)$ 49. $(y-2)(y+1)$ 50. $(y-6)(y+5)$

അദ്ധ്യായം 18

---

1. $(2x+3)(3x+1)$
2. $(2x+3)(x+1)$
3. $(4x+5)(x+1)$
4. $(2x+3)(3x+2)$
5. $(3x+4)(x+1)$
6. $(2x+3)(4x+3)$
7. $(3x+2)(2x+1)$
8. $(x+1)(7x+3)$
9. $(2m+3)(5m+2)$
10. $(4y+3)(3y+2)$
11. $(4x+5)(5x+3)$
12. $(3x+4)(5x+3)$
13. $(x-2)(3x-2)$
14. $(2x-3)(x-1)$
15. $(2x-3)(3x-1)$
16. $(4x-5)(x-1)$
17. $(2x-3)(3x-2)$
18. $(3x-4)(x-1)$
19. $(x-1)(7x-3)$
20. $(3x-2)(2x-1)$
21. $(y-1)(19y-6)$
22. $(4m-3)(3m-2)$
23. $(3x-4)(5x-3)$
24. $(2x-3)(4x+5)$
25. $(3x+2)(4x-1)$
26. $(y+3)(7y-2)$
27. $(2m+7)(m-2)$
28. $(x+5)(4x-1)$
29. $(3x+5)(2x-3)$
30. $(x+y)(5x-3y)$
31. $(3x+4y)(5-y)$
32. $(x-3)(7x+2)$
33. $(2x-7)(+2)$
34. $(3x-5)(2x+3)$
35. $(y-1)(12y+2)$
36. $(y-5)(4y+1)$
37. $(m-1)(5m+3)$
38. $(3x-5)(2x-1)$
39. $(3x-4)(5x+1)$
40. $(2-3x)(3-2x)$

അദ്ധ്യായം 17

1. $x+3$ 2. $x+2$ 3. $x+3$ 4. $x+3$

5. $x-7$ 6. $a-7$ 7. $a-2$ 8. $a-6$

9. $a+3$ 10. $b+15$ 11. $2b+5$ 12. $3b+4$

13. $4y+3$ 14. $3y+7$ 15. $5y-6$ 16. $2p^2+p-3$

17. $3m^2-5m-6$ 18. $5n^2+4n-7$ 19. $7k^2-2k-5$

20. $5x^2-3x-10$ 21. $3x+11$; 60 22. $5y+14$; 30

23. $3p+4\frac{1}{2}$; $-5\frac{1}{2}$ 24. $3x^2-5+6$; -7

25. $2a^2+1\frac{1}{2}a+2\frac{3}{4}$; $1\frac{1}{4}$ 26. $2x+4$; 5

27. x^2-3x+8 ; -17 28. $2x^2+x-1$; -4

29. x^2+xy+y^2 30. x^2-xy+y^2

അദ്ധ്യായം 18

1. ± 5 2. ± 7 3. ± 2 4. ± 5

5. ± 4 6. ± 4 7. ± 10 8. ± 3

9. ± 5 10. ± 5 11. ± 5 12. ± 3

13. ± 1 14. ± 2.8 (ഏകദേശം) 15. ± 2

16. ± 3 17. $+2$ 18. ± 2 19. ± 7

20. ± 3

അദ്ധ്യായം 19

1. $3, 5$ 2. $2, -4$ 3. $-7, 6$ 4. $-1, -8$

5. $1, -2$ 6. $3, 10$ 7. $\frac{3}{4}, \frac{1}{2}$ 8. $2\frac{1}{2}, 2\frac{2}{3}$

9. $-15, 8$ 10. $1\frac{1}{3}, \frac{1}{5}$ 11. $0, -3$ 12. $0, \frac{3}{4}$

13. $1\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}$ 14. $-\frac{5}{4}, -\frac{5}{4}$ 15. $-1, -1$

16. 1, 1 17. 2, —1 18. —2, 1 19. 2, 1

20. —3, —2 21. 4, —3 22. —10, —1

23. 9, 2 24. 4, 2 25. $1, \frac{1}{4}$ 26. $1\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}$

27. $1\frac{1}{2}, -3$ 28. $1\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}$ 29. $2, 1\frac{1}{2}$ 30. $1\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}$

31. 5, —7 32. 7, —2 33. 4, —7 34. $\frac{2}{3}, -3$

35. $\frac{8}{9}, -\frac{1}{3}$ 36. $3\frac{1}{3}, -\frac{2}{5}$ 37. 5, 1

38. $5, -1\frac{1}{2}$ 39. $4, \frac{3}{4}$

അദ്ധ്യായം 20

1. 9, 6 2. 2, —7 3. —12, —4 4. 8, —9

5. 7, —6 6. 7, —5 7. $4, 3\frac{1}{2}$ 8. $2\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$

9. $\frac{2}{3}, \frac{1}{4}$ 10. $1\frac{1}{3}, -2$ 11. $1\frac{2}{3}, -3\frac{1}{2}$ 12. $\frac{5}{6}, \frac{7}{5}$

13. ·45, —4·45 14. ·58, —2·58 15. ·85, —2·35

16. 1·37, —1·70 17. ·72, —1·12 18. 6·40, ·26

19. —·61, —·64 20. 1·26, —·45 21. —1·68, —·45

അദ്ധ്യായം 21

1. 14, —3 2. 15, —10 3. 10, 6 4. 20, 5

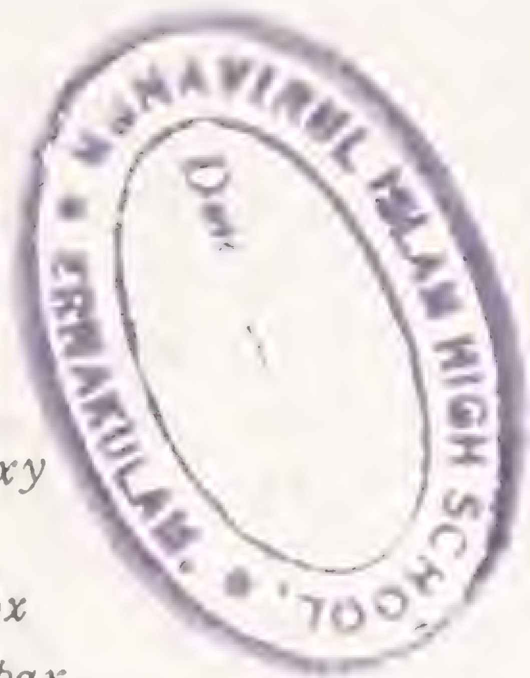
5. 15, 5 6. 20, 0 7. 32 8. 15, 3

9. 10, 12 10. 16, 18 11. 11, 13 12. 15, 17

13. 8, 10 14. 24 അ. 15. 30 അ; 15 അ.

16. 36 അ., 12 അ
17. 16 അ, 12 അ.
18 19 അ, 12 അ.
19. 15 അ., 10 അ.
20 30 അ, 20 അ.
21. 13 അ., 5 അ.
22. 5 മ. 23. 30
24. 22 25 20
26. 12 27. 3 രൂ.
28. 12 mi. / hr.
29. 4 അ. 30 7, 8
31. 15 mi. | hr.
32. 6 അ. 33. 12 അ.
34. 48 35 15 പുസ്തകം; 4 രൂ.
36. 24 37. 30 മിനിട്ട്, 15 മിനിട്ട് 38. 15 അ., 16 അ

അദ്ധ്യായം 22



1. $a^2 + x^2 + y^2 + 2ax + 2ay + 2xy$
2. $x^2 + a^2 + 4b^2 + 2ax + 4bx + 4ab$
3. $4x^2 + y^2 + b^2 + 4xy + 4bx + 2by$
4. $1 + 2x + 3x^2 + 2x^3 + x^4$
5. $a^2 + 4x^2 + 9y^2 + 4ax + 6ay + 12xy$
6. $a^2 + 4b^2 + 9 + 4ab + 6a + 12b$
7. $x^4 + a^2x^2 + b^2 + 2ax^3 + 2bx^2 + 2abx$
8. $x^4 + p^2x^2 + q^2 + 2px^3 + 2qx^2 + 2pqx$
9. $x^4 + 4x^3 + 10x^2 + 12x + 9$
10. $4x^2 + 9y^2 + 25 + 12xy + 20x + 30y$
11. $a^2 + x^2 + y^2 + 2ax - 2ay - 2xy$
12. $a^2 + x^2 + 4b^2 + 2ax - 4ab - 4bx$
13. $x^2 + y^2 + 9 + 2xy - 6x - 6y$
14. $a^4 - 2a^3 + 7a^2 - 6a + 9$
15. $4a^2 + 9b^2 + c^2 - 12ab - 4ac + 6bc$
16. $x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x + 9$
17. $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 2ab^2c + 2a^2bc + 2abc^2$
18. $a^2x^2 + b^2x^2 + b^2c^2 - 2abx^2 - 2abcx + 2b^2cx$

അദ്ധ്യായം 23

1. $a^3 + 3a^2x + 3ax^2 + x^3$
2. $b^3 + 3b^2y + 3by^2 + y^3$
3. $x^3 + 3x^2m + 3xm^2 + m^3$
4. $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$
5. $a^3 + 9a^2 + 27a + 27$
6. $y^3 + 6y^2 + 12y + 8$
7. $64 + 48b + 12b^2 + b^3$
8. $125 + 75x + 15x^2 + x^3$
9. $216 + 108m + 18m^2 + m^3$
10. $8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$
11. $27a^3 + 54a^2 + 18a + 8$
12. $x^3 + 9bx^2 + 27b^2x + 27b^3$
13. $8a^3 + 36a^2b + 54ab^2 + 27b^3$
14. $27x^3 + 54x^2y + 36xy^2 + 8y^3$
15. $8x^3 + 60x^2y + 150xy^2 + 125y^3$
16. $125a^3 + 225a^2b + 135ab^2 + 27b^3$
17. $a^3b^3 + 3a^2b^2 + 3ab + 1$
18. $x^3y^3 + 6x^2y^2 + 12xy + 8$
19. $27 + 27ab + 9a^2b^2 + a^3b^3$
20. $a^3b^3 + 3a^2b^2xy + 3abx^2y^2 + x^3y^3$
21. $a^3b^3 + 36a^2b^2 + 54ab + 27$
22. $27x^3 + 108abx^2 + 144a^2b^2x + 64a^3b^3$
23. $a^6 + 3a^4 + 3a^2 + 1$
24. $a^6 + 3a^4x + 3a^2x^2 + x^3$
25. $a^3 + 3a^2x^2 + 3ax^4 + x^6$
26. $a^6 + 3a^4b^2 + 3a^2b^4 + b^6$

27. $8x^6 + 36x^4y^2 + 54x^2y^4$

28. $\frac{a^3}{b^3} + 3\frac{a^2}{b^2} + 3\frac{a}{b} + 1$

29. $a^3b^3 + \frac{3}{2}a^2b^2 + \frac{3}{4}ab + \frac{1}{8}$

30. $\frac{a^3}{b^3} + 3\frac{a^2x}{b^2y} + 3\frac{ax^2}{by^2} + \frac{x^3}{y^3}$

31. $x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3$

32. $b^3 - 3b^2c + 3bc^2 - c^3$

33. $8x^3 - 12x^2 + 6 - 1$

34. $x^3 - 6x^2y + 12xy^2 - 8y^3$

35. $8x^2 - 36x^2y + 54xy^2 - 27y^3$

36 $27a^3 - 108a^2 + 144a - 64$

37. $125x^3 - 225x^2y + 135xy^2 - 27y^3$

38. $27x^3 - 108abx^2 + 144a^2b^2x - 64a^3b^3$

39. $a^3b^3 - 3a^2b^2xy + 3abx^2y^2 - x^3y^3$

40. $27x^3 - 135abx^2 + 225a^2b^2x - 125a^3b^3$

41. $a^6 - 9a^4 + 27a^2 - 27$

42. $x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1$

43. $a^3 - 3a^2x^2 + 3ax^4 - x^6$

44. $a^6 - 3a^4b^2 + 3a^2b^4 - b^6$

45. $a^3b^3 - \frac{3}{2}a^2b^2 + \frac{3}{4}ab - \frac{1}{8}$

അദ്ധ്യായം 21

1.	$m^3 + n^3$	2	$a^3 + x^3$	3.	$p^3 + q^3$
4.	$a^3 + 1$	5.	$x^3 + 8$	6.	$m^3 + 27$
7.	$27 + a^3$	8.	$x^3y^3 + 1$	9.	$a^3b^3 + c^3$
10.	$8x^3y^3 + a^3$	11.	$m^3 - n^3$	12.	$x^3 - y^3$
13.	$m^3 - p^3$	14.	$x^3 - 8y^3$	15.	$a^3 - 27b^3$
16.	$8x^3 - 27y^3$	17.	$8x^3 - 125y^3$	18.	$27x^3 - 64y^3$
19.	$a^6 - b^3$			20.	$x^6 - y^6$

അഭ്യാസം 25

1. $(x+3)(x^2-3x+9)$
2. $(x+1)(x^2-x+1)$
3. $(y+2)(y^2-2y+4)$
4. $(m+4)(m^2-4m+16)$
5. $(xy+1)(x^2y^2-xy+1)$
6. $(1+2x)(1-2x+4x^2)$
7. $(x-1)(x^2+x+1)$
8. $(1-x)(1+x+x^2)$
9. $(1-3a)(1+3a+9a^2)$
10. $(2a-1)(4a^2+2a+1)$
11. $(5x-a)(25x^2+5ax+a^2)$
12. $(1+ax)(1-ax+a^2x^2)$
13. $(3x-4)(9x^2+12x+16)$
14. $(1+x^2)(1-x^2+x^4)$
15. $(x+1)(x-1)(x^4+x^2+1)$
16. $(2-x^2)(4+2x^2+x^4)$
17. $(x+y)(x-y)(x^4+x^2y^2+y^4)$
18. $(10a-1)(100a^2+10a+1)$
19. $(x^2+a)(x^4-ax^2+a^2)$
20. $(2a-3b)(4a^2+6ab+9b^2)$
21. $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ac-bc+2ab)$
22. $(a+b-x)(a^2+b^2+x^2+2ab+ax+bx)$
23. $(a+x-3)(a^2+x^2+2ax+3a+3x+9)$
24. $(x-a+b)(x^2+ax-bx+a^2+b^2-2ab)$

UNIVERSITY PRESS, TVM.




NURAVIRUL ISLAM HIGH SCHOOL
Date
ERNAKULAM.